# 層・圏・トポス

## 現代的集合像を求めて

竹内外史

日本評論社

# 層・圏・トポス

## 現代的集合像を求めて

竹内外史

日本評論社

# まえがき

私の学生の頃は現代数学の基礎概念としては，まず位相と群，環，体などの代数系を勉強したものであった．

現在でも上の二つは変らないがその他に出来れば，層，圏，トポス，それにロジックを加えたいような気がする．

それは以上のものが特に大切という意味ではなくて，むしろ手軽でそれを知っていると色々の所に結びつきや応用があって便利でもあるし，また全体的な大きな見通しをもつのに都合がよいといった方がよいだろう．

ところで余りこの方面の入門書を多くは見かけないようである．それがこの本を書く一つの動機である．しかし実の所もう一つ別な理由があるのである．

層とトポスとは両者とも現代的な集合概念の拡張なのである．もっと正確にいえば，我々の論理を古典論理から直観論理へと移行したときに，我々の集合概念が自然にうける変化をうけて出てくるものが層であり，またトポスなのである．

一方，圏は関数概念の機能的な拡張であって，関数概念と集合概念は一方から他方が出るという意味で同等なものであるから，圏もまた集合概念の現代的拡張といってもよいのである．

この意味で層，圏，トポスは集合論および数理論理学と密接な関係をもっている．私の専門は数理論理学および集合論であるから出来ればこういうことを多少なりとも強調する入門書を書いてみたいと思ったのである．

このため最初の計画は冒頭から層，トポスを直観論理の上の集合概念とし

て一つ一つその必然性とどんな集合を構成しているかを説明して行く本を書くことにあった．しかしながらこの計画では膨大な紙数が必要な上に，現在の我が国における数学基礎論普及の現状から見るとかえって抵抗の多いものをつくるだけのことになり，この分野への紹介という意味の役割を果さなくなるのではないかと恐れた．

したがって本書では最初に層，圏，トポスを数学的に処理して，あとで論理や集合との関係を説明し意味づけを行うという体裁をとった．しかしながらその欠を補うべくあとがきで多少の説明を付加えることにした．この書がこの分野への入門書としていくらかの役に立つならば筆者としては望外の喜びである．

さてこの書でのべたような現代的集合像の意味は何んであろうか？　現代的集合像といっても古典的な集合論に基いてのことであるから集合概念の思想的深化にはなっていない．

ただ，集合概念は現代数学を支え覆いかぶさっている中心的概念であるから，論理をかえ，したがってまた集合概念の自然な拡張が得られれば一挙に数学のすべての概念にそれはフサワシイ類似概念を与えることになる．この点では今後尚，色々な論理の変形または集合概念の拡張が数学に大きな影響を与えることが予想される．

若し集合論のブール価モデルの理論を知っているならば，読者は層やトポスの理論とブール価モデルの理論の相似性とに驚ろかれるであろう．事実この二つの概念は全く同じ発想であるといってよい．二つとも真偽だけの二値論理ではなくて多くの中間の値のある論理を考えた上で集合概念を拡張したのである．

層やトポスの方は開集合で，ブール価モデルの方は普通は正則開集合であるが，ブール価モデルの手法を開集合を用いて行うことに何んの困難もないから，そうすれば一層似かよったものになる．

実際ブール価モデルと層，トポスとは殆んど同じ考えといってよく，両者の相関関係をハッキリとのべることも可能である．ただ，本書ではブール価

モデルを述べる余裕がなかったのでこの問題を議論出来なくて残念である.

ブール価モデルは Cohen の forcing の別名であるから Grothendieck の考えと Cohen の考えとが同じ発想から出ていたといってもよく，二十世紀後半の数学に現代的集合像が大きな寄与をしたといえるのである.

このことは次のような興味のある課題をあたえる. Grothendieck 学派が代数幾何のために作った理論を集合論に飜訳したときその意味は何んであろうか？ 逆にブール価モデルで Solovay あたりがした沢山の興味深い構成を代数幾何の方にもって行くとどんな意味があるのであろうか？

本書をよみ終えたあとに，このようなことをいろいろ考えることを著者は望むものである.

本書の出版に関しては日本評論社の金沢公子さん並びに西原昌幸氏に大変お世話になった. ここに厚くお礼を申しのべたい.

1977年11月　　イリノイにて

竹内外史

# 目　次

## 第3章 トポス



## 第4章 直観論理



## 第5章 高階直観論理

# はじめに

ここでは本文とは別に，これからやろうとすることについての解説をしようと思います．数学的なことにすぐ入りたい人はここは飛ばしてすぐ本文に入って下さい．

この本では位相空間についてのごく初歩のことは知っているものと仮定します．

いま実数全体からなる位相空間を $X$ とします．すなわち $X$ とは左の方の無限の彼方から右の方の無限の彼方へと広がった1本の直線を思い浮べればよい訳です．

---

$a, b$ が実数で $a<b$ が成立しているときに，開区間 $(a, b)$，閉区間 $[a, b]$ を

$$(a, b)=\{x \in X | a<x<b\},$$

$$[a, b]=\{x \in X | a \leq x \leq b\}$$

によって定義します．時々 $(a, b]$ や $[a, b)$ などの開でも閉でもない区間も用いられます．念のために定義をあげますと次のようになります．

$$(a, b]=\{x \in X | a<x \leq b\},$$

$$[a, b)=\{x \in X | a \leq x<b\}.$$

さて $X$ の部分集合 $G$ が開集合であるということは

“$G$ からどんな点 $x$ をとってきても，

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G$$

となるような $\varepsilon>0$ が必ず存在する”

ことを意味します．$X$ 自身や開区間は開集合です．空集合 $\phi$ も開集合です．$\phi$ が開集合だと考える理由は $\phi$ には元が一つもなく，したがって $\phi$ からどんな元をとってきてもという仮定自身が偽になるからです．

開集合は次の二つの性質をみたします．

1. $G_1$ と $G_2$ とが開集合ならば $G_1 \cap G_2$ も開集合である．
2. $A$ を $X$ の任意の部分集合とするとき $A$ に含まれる最大の開集合が存在する．この $A$ に含まれる最大の開集合を $A$ の開核といって $A^\circ$ で表わす．

ここで $A^\circ$ が $A$ に含まれる最大の開集合という意味は次のことが成立しているということです．

$$G \subseteq A, \text{“}G \text{ は開集合である”} \Longrightarrow G \subseteq A^\circ$$

この開集合の二つの性質から次の性質が導びかれます．

3. すべての $\alpha$ に対して $G_\alpha$ が開集合であるとき，$\bigcup_\alpha G_\alpha$ もまた開集合である．

証明）$A = \bigcup_\alpha G_\alpha$ とすれば，$A^\circ$ の最大性と $G_\alpha \subseteq A$ から $G_\alpha \subseteq A^\circ$ が出てくる．ゆえに $\bigcup_\alpha G_\alpha \subseteq A^\circ$．ところで $A^\circ \subseteq A = \bigcup_\alpha G_\alpha$ であるから，$A^\circ = \bigcup_\alpha G_\alpha$ となる．

ところで $A^\circ$ は開集合であるから，$\bigcup_\alpha G_\alpha$ は開集合である．

さて実数空間 $X$ の位相についてのべるのはこの位にして，いよいよ本題に移ることにしましょう．

まず“実数である”という概念を考えることにしましょう．いま勝手に何か $x$ をとってきて考えます．すると $x$ は実数であるか実数でないか，どちらかにきまってしまいます．50% 実数であとの 50% は実数でないというようなことは考えられません．いつでも 100% 実数であるか，または 100% 実数でないかのいずれかです．

さて部分的に実数であって部分的には実数でないというようなものを上手に定義できるでしょうか？　できればそのような新しい数に実数と同じよう

な $=$ や $<$ や $+$ や $\cdot$ を定義したいのです.

こういう新しい数の定義の仕方は色々あります. 次の新しい数の定義はそういう定義のなかでも面白いものの一つです.

$X$ から実数への連続関数を新しい数と定義する. すなわち $f\colon X\longrightarrow X$ なる連続関数 $f$ を新しい数だと思うことにするのです.

この新しい数は実数に似た性質をもっています. すなわち, $f$ と $g$ とを新しい数とするとき, その和 $f+g$ や積 $f\cdot g$ を次のように定義することができます.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x).$$

さて部分的には新しい数であるが部分的にはそうでないというものを定義することにしましょう.

いま $G$ を $X$ の開集合として $f\colon G\longrightarrow X$ を連続関数とします. このとき $f$ は $X$ 全体で定義されていないので完全な新しい数ではありません. ここで次のようないいまわしを用いることにします.

$f$ は $G$ の分だけ新しい数である.

このいいまわしによれば, $f$ が完全な新しい数であること, すなわち $f\colon X\longrightarrow X$ なる連続関数であることは

$f$ は $X$ の分だけ新しい数である

ということになります. すなわち完全にとか100%とかに相当するのが $X$ で, 部分的にというのが $X$ の開集合 $G$ をとって $G$ の分だけということになります. 一番極端な場合 $G$ が空集合 $\phi$ のときを考えて, “$\phi$ の分だけ……である” ということは “……が全く成立しない” ということだと考えます.

ここで開集合 $G$ をとることの理由は以下に連続というような位相に関係の深いものだけを考えて行く, したがって位相的な概念の分析に役立つようなしくみを作るためです.

以下に $f$ が $G$ の分だけ新しい数であるということを $\mathrm{E}f=G$ で表わすことにします. これは数学的に普通に $f$ の定義域が $G$ であると思ってもよ

い訳です.

さて完全な新しい数 $f, g$ をとって考えます. すなわち $\mathrm{E}f=X$ で $\mathrm{E}g=X$ です. このとき $f<g$ をどのように定義したらよいでしょうか. いま

$$G=\{x\in X|f(x)<g(x)\}$$

なる集合 $G$ を定義します. $G$ は明らかに開集合になっています. このとき

$$[f<g]=G$$

によって $[f<g]$ を定義して上の式を "$f<g$ が $G$ の分だけ成立している" と考えることにします.

例として $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ としますと, $f<g$ は $(-\infty, 0)\cup(1, \infty)$ の分だけ成立していることになります.

もう一つの例として $f<g$ が完全に成立している, すなわち $[f<g]=X$ ということは, すべての $x\in X$ について $f(x)<g(x)$ であるということになっています. 例えば $f(x)=x$ で $g(x)=x+1$ のときは $[f<g]=X$ で $f<g$ が 100% 成立しています.

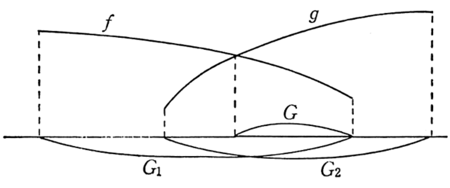
いま上では $f, g$ が完全な新しい数のときだけを考えましたが, $f, g$ が部分的な新しい数のときも同じように定義をすることができます. これをやってみますと, いま $\mathrm{E}f=G_1$, $\mathrm{E}g=G_2$ として

$$G=\{x\in G_1\cap G_2|f(x)<g(x)\}$$

と定義をしますと $G$ は開集合になります. このとき

$$[f<g]=G$$

と定義して "$f<g$ は $G$ の分だけ成立している" と読むことにします.



さて $[f<g]$ の定義を $f, g$ が部分的な新しい数のときに拡張したように，$f+g$ や $f\cdot g$ の定義も $f, g$ が新しい数のときにも拡張することにします．まず $G_1=\mathrm{E}f$, $G_2=\mathrm{E}g$ とするとき $f+g$ も $f\cdot g$ も $G=G_1\cap G_2$ の上で定義されている連続関数で

$$x\in G \Longrightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$x\in G \Longrightarrow (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

によって定義することにします．

したがって，$f+g$ や $f\cdot g$ をつくると一般には定義域が小さくなって行きます．別のふうにいえば $f+g$ が新しい数である可能性は $f$ が新しい数である可能性より小さくなって行きます．

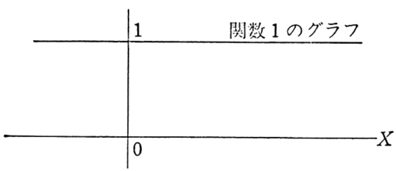
さてこのように定義すると，新しい数は＋，・，＜について実数と同じ性質をもっているでしょうか？　まず次の簡単な実数の性質を考えてみましょう．

$$a<b \Longrightarrow a<b+1.$$

これを新しい数の形でかき直しますと

$$f<g \Longrightarrow f<g+1$$

となります．ここで1はこの場合は下の図のような関数を意味するものとします．すなわち $X$ のすべての点で1を値とする関数のことと定義します．




さて上の式は新しい数についても常に成立しています．しかし次は常に成立しているというよりは，常に成立しているように我々は $\Longrightarrow$ の意味を解釈するといった方がよいのでそれをここに説明することにします．

いま例として $f, g$ を次のものとします．

$\mathrm{E}f=(0,\infty)$ で　　$0<x \Longrightarrow f(x)=x$,

$\mathrm{E}g=(0,\infty)$ で　　$0<x \Longrightarrow g(x)=x^2$.

このとき $g+1$ は定義によって次の関数 $h$ を意味します.

$\mathrm{E}h=(0,\infty)$ で　　$0<x \Longrightarrow h(x)=x^2+1$.

さてこのとき

$$[f<g]=(1,\infty),\quad [f<g+1]=(0,\infty)$$

が成立します. したがっていま任意の命題 $\varphi$ に対して $\varphi$ がどれだけの開集合 $G$ で成立しているかという概念が定義されていて, これを $[\varphi]=G$ で表わすことにします. このとき $\varphi_1,\varphi_2$ に対して $[\varphi_1]=G_1$ で $[\varphi_2]=G_2$ のときに, $\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_2$ が成立するということを $G_1 \subseteq G_2$ であるということと定義すれば $(1,\infty)\subseteq(0,\infty)$ ですから, 上の式 $f<g \Longrightarrow f<g+1$ は成立していることになっています.

ここでよく考えてみて下さい. この定義は人工的で不自然でしょうか. これは考える立場をかえただけでごく自然な考え方だといってよいと思います. このため先ず実数についてのもとの式

$$a<b \Longrightarrow a<b+1$$

を考えることにします. 数学ではこの式は $a<b$ が成立しないときは $a<b+1$ の真偽にかかわらず正しいと考えるのです. これをそのまま

$$f<g \Longrightarrow f<g+1$$

のときにもってきますと, それは $[f<g]=\phi$ のときは $[f<g+1]=G_2$ の $G_2$ がなんであろうとも正しい, すなわち $\phi\subseteq G_2$ になっているということになっています. すなわち $\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_2$ は $G_1=[\varphi_1]\subseteq G_2=[\varphi_2]$ が成立しているときには正しいと考えることは, 普通の論理で $\varphi_1$ が偽のときには $\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_2$ は正しいと考えることの自然な拡張になっています.

実は上の解釈は次の一般的な定義の特別な場合なのです. いま $G_1, G_2$ を開集合とします. このとき新しい開集合 $G_1 \Longrightarrow G_2$ を

$$(G_1 \Longrightarrow G_2)=((X-G_1)\cup G_2)^{\circ}$$

によって定義します. この上で

$$[\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_2]=([\varphi_1] \Longrightarrow [\varphi_2])$$

と定義します．ここで左辺の $\Longrightarrow$ は論理記号としての $\Longrightarrow$ で，右辺の $\Longrightarrow$ は二つの開集合に新しい開集合を定義する上にのべたものを意味します．同じ記号がちがった意味に用いられているので注意して下さい．

このとき $\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_2$ が正しいということを

$$[\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_2]=X$$

と定義しますと，$[\varphi_1]=G_1$，$[\varphi_2]=G_2$ のときには

"$\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_2$ が正しい" と $G_1 \subseteq G_2$ とが同等

が成立します．これは上の定義からの演習問題ですが，本文で厳密な証明があたえられているのでここでは省略します．

いま同様のことを否定の論理記号 $\urcorner$ について考えてみます．すなわち $\urcorner\varphi$ は "$\varphi$ が成立しない" あるいは "$\varphi$ でない" と読みます．

いま開集合 $G$ に対して $\urcorner G$ を

$$(\urcorner G)=(X-G)^\circ$$

によって定義します．$(X-G)^\circ$ と $\circ$ をつける理由は $X-G$ は開集合でないかも知れないので開集合にするために $(X-G)^\circ$ と $\circ$ をつけたのです．例えば $G=(0,1)$ とすれば $X-G$ は $(-\infty,0]\cup[1,\infty)$ と開集合ではないので $(X-G)^\circ=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ と $\circ$ をつけることによって初めて開集合となります．この計算を式でかけば

$$(\urcorner(0,1))=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$$

となっています．

いま $[\varphi]=G$ のときに $[\urcorner\varphi]$ を

$$[\urcorner\varphi]=\urcorner G$$

によって定義します．ここで左辺の $\urcorner$ は論理記号の $\urcorner$ で右辺の $\urcorner$ は開集合から開集合をつくる，上に定義された操作です．上の式はかき直すと

$$[\urcorner\varphi]=\urcorner[\varphi]$$

になっています．

もう一寸我慢をしてもらってもう一つ論理記号 "または" $\vee$ を考えること

にします．すなわち $\varphi_1\vee\varphi_2$ は“$\varphi_1$ または $\varphi_2$ が成立する”と読みます．更に開集合 $G_1, G_2$ に対して $G_1\vee G_2$ を

$$G_1\vee G_2=G_1\cup G_2$$

と定義して $[\varphi_1]=G_1$, $[\varphi_2]=G_2$ のときに

$$[\varphi_1\vee\varphi_2]=G_1\vee G_2$$

と定義します．これは $[\varphi_1\vee\varphi_2]=[\varphi_1]\vee[\varphi_2]$ とかいても $[\varphi_1\vee\varphi_2]=G_1\cup G_2$ とかいても同じことです．

いま以上の定義を新しい数に対してあてはめてみることにします．$\mathrm{E}f=X$, $\mathrm{E}g=X$ として $f, g$ を

$$f(x)=x, \quad g(x)=x^2$$

によって定義されているものとします．このとき

$$\begin{aligned}[f<g]&=(-\infty, 0)\cup(1, \infty),\\ [\neg f<g]&=\neg[f<g]\\ &=(X-[f<g])^\circ\\ &=([0,1])^\circ\\ &=(0,1),\end{aligned}$$

$$[f<g\vee\neg f<g]=(-\infty, 0)\cup(0,1)\cup(1,\infty).$$

これは考えてみるとちょっと妙な気がします．論理学では $\varphi\vee\neg\varphi$ は排中律といって，いつでも正しい命題になっています．所で上の $f<g\vee\neg f<g$ が正しいということは $[f<g\vee\neg f<g]=X$ だということですから，本当は右辺が $X$ になってくれないと困るのです．所で右辺は $X$ から 0 と 1 とが抜けています．これはどうしたらよいのでしょうか？

実は新しい数の世界は直観論理の論理の世界であって普通の論理，すなわち古典論理の論理の世界ではないのです．直観論理では排中律は正しい法則ではないのです．そして上の例は排中律が成立しない一つの例なのです．

まず直観論理が古典論理と正反対の所をのべたので，直観論理が何か異常なもののように思われるかも知れません．実は直観論理は古典論理に殆んど同じものなのです．例えば以前の $\vee$（または）の他に $\wedge$（そして）をいれ

て考えますと，∨と∧とだけに関する限り直観論理と古典論理とは全く同じものになっています．少し乱暴ないい方をすれば排中律が成立しないことだけが直観論理と古典論理のちがいであってあとは同じといってもよいのです．

ここに少しばかり直観論理の説明をしますと，古典論理ではすべての命題が真と偽とのたった二つに別れてしまう絶対的なキビシイ，ユルギナイ世界の論理と考えられます．直観論理はもっと人間的な論理です．もう少し詳しくいえば，勝手な命題 $\varphi$ をとったときに我々人間は $\varphi$ が正しいか偽かを確かめる方法をもっていないので，$\varphi$ が正しいか偽かであるという命題は我々が真偽を確かめて行くという立場からは無意味な命題になってしまいます．少し大ざっぱな言い方をしますと $\varphi$ が成立するということを“$\varphi$ を確認する方法をもっている”といいかえたときに出てくる論理が直観論理です．その点で直観論理の方が我々が証明して確認して行くという行動的な立場では古典論理よりはピッタリとした論理だといってよいと思います．

さてもとへ戻って新しい数を考えることによって我々は何をしようとしているのでしょうか？　この問いにいろいろな風に答えることができます．その一つとして次のようにいってもよいと思います．

新しい数というのは直観論理に基づいた実数を考えているのである．したがって古典論理と直観論理とのくいちがいを除いては新しい数は実数と似た性質をもっているのは当然のことである．

別な答をもう一つあげますと次のようになります．

新しい数というのは層という概念の特別な場合である．層というのはある種の位相的性質を分析するために考え出された巧みな構造であって，例えば上のような層を考えることは連続関数の性質を考えるのに便利である．

さて一般的に古典的な数学の構造があるとします．このとき古典論理を直観論理にかえて上の構造を直観論理に基づいて研究することができます．また更にその構造を位相空間の上に拡大して層構造として一段高い概念を導入することができます．

この二つの考え方は上に述べた意味で同じものの別な解釈と考えることができます．また一方の結果をもう一つの方に活用することができます．

ところで現代数学の概念は集合の概念だけから構成することができます．したがって直観論理に基づいて，集合概念と集合という構造を層構造として位相空間の上に拡大したものを考えて両者の相関関係をのべておけば，一般論としては上の目的は達成する訳です．

本文ではまず層について議論をします．次に集合という構造を層構造として位相空間の上に拡大したものをトポスと名づけてこれについてのべます．

トポスに現われる集合は普通の集合とは異なるので，別の言語を用いた方が便利で混乱の恐れがありません．このために最も有効に用いられるのが圏の言語です．このため圏について層のあとにのべることにします．圏は現代数学において極めて有効に用いられている言語といってよいと思います．

次に直観論理の上の集合概念を数理論理学の立場からのべて，最後にトポスと直観論理の上の集合概念の同等性をのべることにします．

この意味で本書にのべることは初等的ですが新しい概念ばかりなので新しい概念に馴れない人は苦手かも知れません．しかし逆にいえば現代数学の入門書としては役に立つこともあり得ると思います．

さてこのまえがきにかいたようなことは講談社のブルーバックスの中の小著『集合とはなにか』のなかの第2章“天地創造”のなかの“数学基礎論”のなかの直観主義の項，および第4章“現代集合論”のなかの“コーエンの仕事”および“アラベスク”のなかに関連した解説があります．御参考にして頂ければ幸いです．尚本書はそのアラベスクの項にかいたことを詳しく数学的に遂行したものといってよいと思います．

# 第1章　層

## 1. 集合について

集合と位相についての常識的な演算は知っているものとする．しかし記号その他の約束事をするという意味で少しばかり取り上げることにする．

'$\varphi(x)$ をみたす $x$ 全体の集合' を普通のように

$$\{x|\varphi(x)\}$$

で表わすことにする．ここに $x$ の動く範囲は直接または間接に定まっているものとする．この記号を用いるとき基本的な性質は次の式で表わされる．

$$a \in \{x|\varphi(x)\} \Leftrightarrow \varphi(a).$$

この $\{x|\varphi(x)\}$ の記号の他に有限個の元 $a_1, \cdots, a_n$ だけからの集合を $\{a_1, \cdots, a_n\}$ で表わす．したがって基本的な性質として

$$b \in \{a_1, \cdots, a_n\} \Leftrightarrow b=a_1 \vee \cdots \vee b=a_n$$

が成立する．ここに $\vee$ は 'または' と読む．したがって $\{a_1, \cdots, a_n\}$ は $\{x|x=a_1 \vee \cdots \vee x=a_n\}$ の略であると思えばよい．

この $\{a_1, \cdots, a_n\}$ の記号で $n$ が1か2のときが一番頻繁に用いられるのでその基本的性質をかくことにすれば次のようになる．

$$b \in \{a\} \Leftrightarrow b=a,$$

$$c \in \{a, b\} \Leftrightarrow c=a \vee c=b.$$

さて技巧的な定義であるが

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

と定義して $\langle a, b\rangle$ を '$a, b$ の二重対' または '$a, b$ の順序対' という．$\langle a, b\rangle$ は $(a, b)$ とかくこともある．この定義の $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ という形は実はあま

り意味がなくて次の定理だけが重要なのである．

**定理 1**　$$\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle \Leftrightarrow a=c\wedge b=d.$$

ここに $\wedge$ は'そして'と読む．

証明）　$\Longleftarrow$ の方は明らかであるから $\Longrightarrow$ の方だけを証明する．いくつかの場合に分けて考える．

$a=b$ のとき，この場合は $a$ は $\langle a, b\rangle$ の元の元として唯一通りに定まるから $a=b=c=d$ となる．

$c=d$ のとき，上の場合と同じ．

$a\neq b$ で $c\neq d$ のとき，この場合 $a$ は $\langle a, b\rangle$ の二つの元の両方共の元になっているという性質によって唯一通りに定まるので $a=c$ がわかる．同様にして $b$ は $\langle a, b\rangle$ の二つの元の一方にだけ含まれているという性質によって唯一通りに定まるので $b=d$ がわかる．

この順序対を用いて関数の定義をすることにする．いま $A, B$ が集合であるとき $f$ が $A$ から $B$ への関数であるということを $f$ が次の三つの条件をみたす集合であると定義してこれを $f\colon A\longrightarrow B$ によって表わすことにする．

1)　$f$ の元はすべて $\langle a, b\rangle$ の形である．しかもここに $a\in A$ で $b\in B$ がみたされているものとする．

2)　$$\langle a, b_1\rangle\in f, \langle a, b_2\rangle\in f\Longrightarrow b_1=b_2.$$

3)　$A$ の任意の元 $a$ に対して $\langle a, b\rangle\in f$ となるような $B$ の元 $b$ が存在する．

いま $f\colon A\longrightarrow B$ として，$a\in A$ とする．このとき関数の条件 2), 3) により $\langle a, b\rangle\in f$ となるような $b$ が唯一通り存在する．この $b$ のことを $f(a)$ と表わすことにする．すなわち次の性質が成立する．

$$f(a)=b\Leftrightarrow\langle a, b\rangle\in f.$$

普通のように空集合を $\phi$ で表わすことにする．いまどんなときに $f\colon\phi$

$\longrightarrow B$ が成立するか考えてみよ．いま $\langle a, b\rangle \in f$ とすれば，関数の条件 1) によって $a \in \phi$ でなければならないからそのような $a$ が存在しないことがわかる．すなわち $f$ は空集合 $\phi$ でなければならない．したがって $f\colon \phi \longrightarrow B$ なる $f$ が存在するとすれば $f=\phi$ でなければならないことがわかるが，逆に $f=\phi$ であればどんな $B$ をとっても $f\colon \phi \longrightarrow B$ となっていることは関数の条件 1), 2), 3) をチェックしてみれば明らかである．いいかえれば

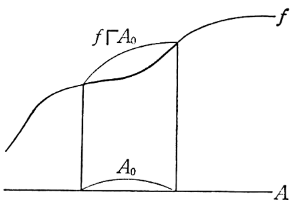
**$\phi$ の上の関数は唯一つ存在して $\phi$ 自身である**

ことがわかる．こんなことを細々と説明したのは $\phi$ の上の関数は一つもないと誤解している人が往々にしているからである．

いま $f\colon A \longrightarrow B$ として，$A_0 \subseteq A$ とする．このとき $f$ を $A_0$ の部分にだけ制限してできる関数を $f \ulcorner A_0$ で表わす．正確に定義すれば

$$f \ulcorner A_0 = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A_0 \wedge b = f(a)\}$$

となる．$f \ulcorner A_0$ はもちろん $A_0$ から $B$ への関数である．




## 2. 前　層

$X$ を空でない位相空間として $\mathfrak{O}(X)$ を $X$ の開集合全体の集合とする．特別な場合として $\phi$ と $X$ とは $\mathfrak{O}(X)$ の元である．

$X$ の上の前層 (a presheaf over $X$) の二通りの定義をあたえて，あとでそれが同等であることを証明することにする．

**前層の第一の定義**

集合 $A$ と $\mathrm{E}\colon A \longrightarrow \mathfrak{O}(X)$ および $\urcorner\colon A \times \mathfrak{O}(X) \longrightarrow A$ なる二つの関数 $\mathrm{E}, \urcorner$ があたえられていて次の条件をみたすとき $A, \mathrm{E}, \urcorner$ の組を $X$

の上の前層という．単に $A$ が $X$ の上の前層であるということも多い．以下に $a, b \in A$, $U, V \in \mathfrak{O}(X)$ と仮定する．

0) どんな $a, b \in A$ に対しても $a \urcorner \phi = b \urcorner \phi$.

1) $$a \urcorner \mathrm{E}a = a.$$

2) $$\mathrm{E}(a \urcorner U) = \mathrm{E}a \cap U.$$

3) $$(a \urcorner U) \urcorner V = a \urcorner (U \cap V).$$

説明の代りにまず例をあげることにする．

$$A = \{f \mid f \text{ は } X \text{ の開集合から実数への連続関数}\}$$

と定義して $f$ の定義域を $\mathrm{E}f$ で表わし，$f \urcorner U$ を $f \ulcorner (\mathrm{E}f \cap U)$ と定義すれば上の三条件がみたされることは明らかであろう．

この例から明らかなように $f \urcorner U$ の $\urcorner$ は $\ulcorner$ とほとんど同じものであるが，$f \urcorner U$ のときは $U$ が $\mathrm{E}f$ の部分集合でないときにも用いるのと，$\urcorner$ は公理的に取り扱われている点が異なっているといってよいだろう．

E は domain（定義域）の抽象化である．

**前層の第二の定義**

$\mathfrak{O}(X)$ から集合を値とする関数 $F$ と，$X$ の開集合 $U, V$ で $U \subseteq V$ なる組 $U, V$ について

$$r_{UV}\colon F(V) \longrightarrow F(U)$$

なる関数 $r_{UV}$ が定義されていて次の条件をみたすとき，$F$ と $r$ との組を $X$ の上の前層という．または単に $F$ を $X$ の上の前層という．$U, V, W \in \mathfrak{O}(X)$ とする．

1) $F(\phi)$ は唯1個の元からなる集合である．

2) $r_{UU}$ は恒等写像.

3) $$U \subseteq V \subseteq W \Longrightarrow r_{UW} = r_{UV} \circ r_{VW}.$$

第一の定義と第二の定義が同等なことを証明する為に，まず第一の定義があたえられていてそこから第二の定義の概念を構成することにする．

$$F(U) = \{f \in A \mid \mathrm{E}f = U\},$$

$$r_{UV}(f)=f\urcorner U$$

によって $F$ と $r$ とを定義すればこれが前層の第二の定義の性質をみたすことは明らかであろう.

いま逆に第二の定義によって前層があたえられているとする. このとき

$$A=\bigcup_{U\in\mathfrak{D}(X)}F(U)$$

$$f\in F(U)\Longrightarrow \mathrm{E}f=U$$

$$f\urcorner U=r_{VW}(f)$$

ここに, $V=U\frown\mathrm{E}f$, $W=\mathrm{E}f$ として以上を定義することにすればこれが前層の第一の定義をみたすことは明らかであろう.

以下に前層の第一の定義および第二の定義の両方の概念を自由に用いて考えて行くことにする.

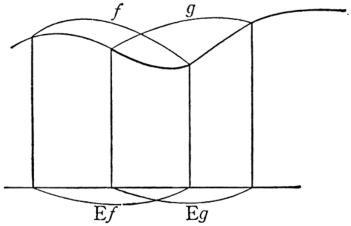
## 3. 層

**定義**　$A$ が前層で $f, g\in A$ とする. このとき $f$ と $g$ とが両立する (compatible) ということを

$$f\urcorner \mathrm{E}g=g\urcorner \mathrm{E}f$$

によって定義する.

次の図のようになっているときがそうであると思ってよい.




さてこの概念を用いていよいよ層の第一の定義をすることにする.

**層の第一の定義**

$X$ の上の前層 $A$ が $X$ の上の層 (a sheaf over $X$) であるとは次の条

件がみたされていることとする.

すべての $A$ の部分集合 $F$ が

$F$ の任意の二元 $f_1, f_2$ は必ず両立している

という条件をみたしているとき，次の二条件をみたす $g\in A$ が唯一通り存在する.

1) $$f\in F \Longrightarrow g\urcorner \mathrm{E}f=f.$$

2) $$\mathrm{E}g=\bigcup_{f\in F}\mathrm{E}f.$$

この唯一つの元 $g$ を $\bigcup F$ で表わすことにする.

前層の所でのべた開集合の上の連続関数の全体は前層であるばかりでなく，層でもあることは明らかであろう.

さて層 $A$ の二元 $f, g$ があたえられたとき，

$$[f=g]=\bigcup\{U\in\mathfrak{O}(X)|f\urcorner U=g\urcorner U\}$$

によって $[f=g]$ を定義することにする.

$[f=g]$ について次の定理が成立する.

**定理 2**　次の性質が成立する. (199 ページ参照.)

i) $$U\subseteq[f=g]\Leftrightarrow f\urcorner U=g\urcorner U.$$

ii) $$[f=f]=X.$$

iii) $$[f=g]=[g=f].$$

iv) $$[f=g]\cap[g=h]\subseteq[f=h].$$

v) $$[f=g]\cap U=[f\urcorner U=g\urcorner U]\cap U.$$

vi) $$\mathrm{E}f\subseteq U\Longrightarrow f=f\urcorner U.$$

vii) $$(\mathrm{E}f\cup\mathrm{E}g)\cap U\subseteq[f=g]\Longrightarrow U\subseteq[f=g].$$

viii) $$[f=g]\cap\mathrm{E}f\subseteq\mathrm{E}g.$$

証明)　i) の $\Longleftarrow$ は明らかであるから，$\Longrightarrow$ だけを考える. いま

$$F=\{f\urcorner V|V\subseteq U\wedge f\urcorner V=g\urcorner V\}$$

と定義をすれば，$f\urcorner U$ も $g\urcorner U$ も $\bigcup F$ となり，$\bigcup F$ は唯一通りに定まるから $f\urcorner U=g\urcorner U$ がわかる.

ii), iii), iv), v) は自明であろう.

vi) は $V \subseteq U$ のとき

$$(f \urcorner U) \urcorner V = f \urcorner U \cap V = f \urcorner V$$

であるから $f \urcorner U$ も $f$ も

$$F = \{f \urcorner V | V \subseteq \mathrm{E}f\}$$

とするときの $\bigcup F$ になっていて，$\bigcup F$ が唯一つに定まるから $f \urcorner U = f$ であることがわかる.

vii) を証明するために

$$f \urcorner (\mathrm{E}f \cup \mathrm{E}g) \cap U = g \urcorner (\mathrm{E}f \cup \mathrm{E}g) \cap U$$

と仮定すれば

$$f \urcorner (\mathrm{E}f \cup \mathrm{E}g) \cap U = (f \urcorner \mathrm{E}f \cup \mathrm{E}g) \urcorner U$$

であって，$f \urcorner \mathrm{E}f \cup \mathrm{E}g = f$ が vi) から出てくるので $f \urcorner U = g \urcorner U$ が出るから明らか.

viii) を証明するために $U = [f = g]$ とおけば

$$f \urcorner U = g \urcorner U,$$

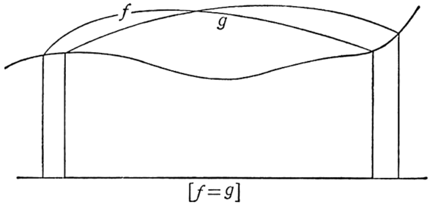
したがって

$$\mathrm{E}f \cap U = \mathrm{E}(f \urcorner U) = \mathrm{E}(g \urcorner U) = \mathrm{E}g \cap U$$

となるから明らか.

さて $f = g$ ならば $[f = g] = X$ は明らかであるが，逆に $[f = g] = X$ ならば

$$f = f \urcorner X = g \urcorner X = g$$



となって $f=g$ となる．

$[f=g]$ は $f=g$ が成立する最大の開集合を意味している．前頁の図のようになっている．

$[f=g]$ は $f=g$ が正しい truth value という．この値が $X$ のときには完全に正しく，値が $\phi$ のときには完全に偽であって，$[f=g]=U$ で $U$ が $\phi$ でも $X$ でもないときは $f=g$ は真でも偽でもなく，強いていえば $U$ の分だけ真ということになっている．

**層の第二の定義**

$S$ が位相空間で $p: S \longrightarrow X$ が $S$ から $X$ への局所同相写像であるときに，$S$ と $p$ との組を $X$ の上の層という．または単に $S$ を $X$ の上の層という．ここに局所同相写像の定義を念のためにすれば，$p: S \longrightarrow X$ が局所同相写像であるとは次の条件がみたされていることと定義する．

$S$ の任意の点 $s$ について，$x=p(s)$ とすれば，$s$ の近傍 $U$ と $x$ の近傍 $V$ とが存在して

$$p \upharpoonright U: U \longrightarrow V$$

となって，更に，$p \upharpoonright U$ が $U$ から $V$ の上への同相写像になっている．

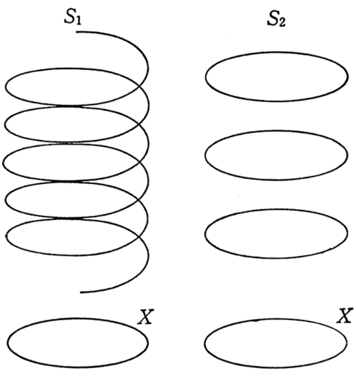
この第二の定義にしたがった層の例を二つあげよう．

右の二つの図で $X$ はともに円であるとして，$S_1$ は $X$ の上にあるラセン状の位相空間とする．

$p_1: S_1 \longrightarrow X$ は垂直に落ちてくる射影と定義する．

次に $S_2$ は $X$ の上にある三つの円とする．

$p_2: S_2 \longrightarrow X$ は前と同様に垂直に降りてくる射影とする．



さて次に層の第一の定義と第二の定義が同等であることを証明する.

まず第一の定義の形 $A, \mathrm{E}, \urcorner$ の組があたえられているものとする. このとき $p: S \longrightarrow X$ なる $p$ と $S$ とを構成することにする. まず

$$\tilde{S}=\{(x,f)|x\in X\wedge f\in A\wedge x\in \mathrm{E}f\}$$

によって $\tilde{S}$ を定義して $(x,f_1),(x,f_2)\in\tilde{S}$ なる $(x,f_1),(x,f_2)$ に対して $(x,f_1)\equiv(x,f_2)$ を

$$\exists U\in\mathfrak{D}(X)(x\in U\wedge U\subseteq \mathrm{E}f_1\frown \mathrm{E}f_2\wedge f_1\urcorner U=f_2\urcorner U)$$

によって定義する. ここに $\exists U\in\mathfrak{D}(X)(\cdots)$ は $(\cdots)$ をみたす $U\in\mathfrak{D}(X)$ が存在すると読む. もちろん $x_1\neq x_2$ のときは $(x_1,f_1)\not\equiv(x_2,f_2)$ とする.

明らかに $\equiv$ は同値関係となるから

$$S=\tilde{S}/\equiv$$

によって $S$ を定義する.

いま $s\in S$ として $s$ を表わす一つの代表元を $(x,f)$ とするとき

$$p(s)=x$$

によって $p$ を定義する. 明らかに

$$p: S\longrightarrow X$$

が成立する.

さて $S$ に位相を入れるために前と同様に $s\in S$ で $(x,f)$ を $s$ を表わす一つの代表元とするとき, $x\in U\subseteq \mathrm{E}f$ なる $U$ をとって

$$\{(x_1,f)/\equiv|x_1\in U\}$$

なる形を一般に $s$ の近傍であると定義する. ここに $(x_1,f)/\equiv$ は $(x_1,f)$ で代表される $S$ の元を表わすものとする.

この定義によって $S$ が位相空間になること, および $p: S\longrightarrow X$ が局所同相写像であることは明らかであろう.

次に第二の層の定義の形 $p: S\longrightarrow X$ があたえられているものとして $A$, $\mathrm{E}, \urcorner$ を構成することにする.

いま $U\in\mathfrak{D}(X)$ とするとき

$$f: U\longrightarrow S \text{ が連続で}$$

$$x \in U \longrightarrow pf(x)=x$$

の条件をみたすとき $f$ を $U$ の上の $S$ の断面ということにして

$$\Gamma(U)=\{f|f \text{ は } U \text{ の上の } S \text{ の断面}\}$$

と定義する.

もし $f\in\Gamma(U)$ ならば $f\colon U \longrightarrow S$ は局所同相写像である. 我々は

$$A=\bigcup_{U\in\mathfrak{O}(X)}\Gamma(U),$$

$$f\in\Gamma(U) \Longrightarrow \mathrm{E}f=U,$$

$$f\urcorner V=f\upharpoonright(V\cap \mathrm{E}f)$$

によって $A, \mathrm{E}, \urcorner$ を定義する. この $A, \mathrm{E}, \urcorner$ が層の第一の定義の条件をみたしていることは明らかであろう.

$F, r$ の形をつくることも簡単にできる,

$$F(U)=\Gamma(U),$$

$$f\in\Gamma(U),\ V\subseteq U \Longrightarrow r_{UV}\circ f=f\upharpoonright V$$

と定義すればよい.

さて前層 $\langle A, \mathrm{E}, \urcorner\rangle$ があたえられたとき, この前層に足りないものを付加えて層をつくることを考えよう. いま $\mathscr{F}$ を次の式で定義する.

$$\mathscr{F}=\{F\subseteq A|F \text{ の元は互いに両立している}\}.$$

このとき

$$\mathrm{E}F=\bigcup_{f\in F}\mathrm{E}f,$$

$$F\urcorner U=\{f\urcorner U|f\in F\}$$

とおいて, さらに $F_1, F_2\in\mathscr{F}$ のとき $F_1\equiv F_2$ を次の条件で定義する.

$$\mathrm{E}F_1=\mathrm{E}F_2\wedge(F_1\cup F_2\in\mathscr{F}).$$

このとき $\equiv$ は $\mathscr{F}$ の上の同値関係であって (199ページ参照) $\mathrm{E}, \urcorner$ は $\mathscr{F}/\equiv$ で定義されていると思ってよい. $\mathscr{F}/\equiv$ は明らかに前層になっている.

前層 $A$ の任意の元 $f$ は

$$F=\{f\urcorner U|U\in\mathfrak{O}(X)\}$$

で表わされるから $A$ はこうしてできる前層 $\mathscr{F}/\equiv$ のなかに埋めこまれてい

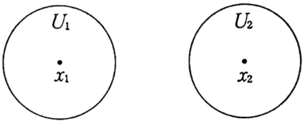
る．さらに $\mathscr{F}/\equiv$ が層になっていることもほとんど明らかであろう．$\mathscr{F}/\equiv$ の元はすべて $\mathscr{F}$ の元 $F$ から $\bigcup F$ によって作られるのだから，$A$ の元の和として作られると思ってよい．この意味で $\mathscr{F}/\equiv$ は $A$ から唯一通りに作られるので，この層のことを前層 $A$ から誘導された層 (induced sheaf) という．

## 4. $\Omega$ の定義

念のために Hausdorff 空間の定義をしておく．位相空間 $X$ が Hausdorff 空間であるということは，$X$ の任意の相異なる二点 $x_1, x_2$ をとったとき，$x_1$ の近傍 $U_1$ と $x_2$ の近傍 $U_2$ とをとって

$$U_1 \cap U_2 = \phi$$

が成立するようにできることをいう．




我々の普通眼にみる空間や距離空間は Hausdorff 空間である．このため我々の位相的直観はともすれば Hausdorff 空間を暗黙のうちに仮定してしまう傾向がある．ところで以下，層の理論においては Hausdorff でない位相空間が活躍する．

$p: S \longrightarrow X$ の形の層の定義において，$X$ が Hausdorff でない場合は勿論あるが，たとえ $X$ が Hausdorff 空間であっても $S$ が Hausdorff でない場合が多い．また，このことは以下に本質的な役割を果している．この状態に早く慣れるためにここに重要な層

$$p: \Omega \longrightarrow X$$

の定義をすることにする．

まず，$\tilde{\Omega}$ を次の如く定義する．

$$\tilde{\Omega} = \{(x, U) | U \in \mathfrak{O}(X) \wedge x \in X\}.$$

いま $(x, U_1), (x, U_2) \in \tilde{\Omega}$ とするとき $(x, U_1) \equiv (x, U_2)$ を次の条件で定義する．

$$\exists V \in \mathfrak{O}(X)(x \in V \wedge V \cap U_1 = V \cap U_2)$$

$x_1 \neq x_2$ のときは勿論 $(x_1, U_1) \not\equiv (x_2, U_2)$ であるものとする．明らかに $\equiv$ は同値関係であるので

$$\Omega = \tilde{\Omega}/\equiv$$

によって $\Omega$ を定義する．

$y \in \Omega$ で $(x, U)$ が $y$ を表わす代表元の一つとするとき

$$p(y) = x$$

で $p$ を定義する．明らかに

$$p: \Omega \longrightarrow X$$

となる．

$\Omega$ に位相を導入するために $y \in \Omega$ なる $y$ の近傍を定義することにする．$y$ の代表元の一つを $(x, U)$ として $x$ の一つの近傍を $V$ とする．このとき $y$ の任意の近傍は次の形をしているものと定義する．

$$\{(x_1, U)/\equiv | x_1 \in V\}$$

この定義によって $\Omega$ が位相空間になっていること，および $p: \Omega \longrightarrow X$ が局所同相写像になっていることは明らかであろう．

いま普通のように $S$ の閉包を $\bar{S}$ と表わすことにする．

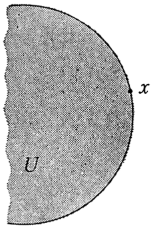
$y \in \Omega$ の代表元を $(x, U)$ とするとき次のことは明らかであろう．

$$x \in U \Longleftrightarrow (x, U) \equiv (x, X),$$

$$x \notin \bar{U} \Longleftrightarrow (x, U) \equiv (x, \phi).$$

したがって，$x$ が $U$ の境界（$\bar{U} - U$ を $U$ の境界という）に入っていないときは $(x, U)$ は $(x, X)$ か $(x, \phi)$ のことであって明暗がハッキリしているといってよい．これにくらべて $x$ が $U$ の境界にあるときは $(x, U)$ は $\Omega$ の微妙な元を表わすことになっている．これを図で示すと次のような図で $x$ がちょっと左の方にずれるとこれは $(x, X)$ と同じになってしまう．また $x$ がちょっと右の方にずれるとこれは $(x, \phi)$ と同じになってしまう．した

がって，$(x, U)$ で表わされる点と $(x, X)$ とで表わされる点の二点については Hausdorff の性質は満足されない．同様にして $(x, U)$ で表わされる点と $(x, \phi)$ で表わされる点の二点については Hausdorff の性質は満足されない．しかしながら，$(x, X)$ で表わされる点と $(x, \phi)$ で表わされる点の二点については Hausdorff の性質は容易に満足させることができる．




さて $\Omega$ を $A, \mathrm{E}, \urcorner$ の形で定義すると次のようになる．

$$\Omega=\{(V, U) \mid V, U \in \mathfrak{O}(X) \wedge V \subseteq U\},$$

$$\mathrm{E}(V, U)=U,$$

$$(V, U) \urcorner W=(V \cap W, U \cap W).$$

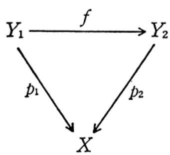
上の二つの $\Omega$ の定義が同一のものであることの証明はここでは演習問題ということにしておこう．

## 5. 層から層への射

いま $X$ の上の二つの層 $p_1: Y_1 \longrightarrow X$ と $p_2: Y_2 \longrightarrow X$ とがあるとき，$f: Y_1 \longrightarrow Y_2$ が層 $Y_1$ から層 $Y_2$ への射であるとは $f$ が連続であって，右の図が可換，すなわち

$$p_1=p_2 \circ f$$

が成立することをいう．




$p_1$ も $p_2$ も局所同相であるから，$f$ が連続で上の図が可換であることから $f$ がやはり局所同相であることがわかる．

いま，$p_1: Y_1 \longrightarrow X$ を第一の定義の形にかいたものを $A, \mathrm{E}, \urcorner$ とし，$p_2: Y_2 \longrightarrow X$ を第一の定義の形にかいたものを $B, \mathrm{E}, \urcorner$ とする．このとき射 $f$ は $\langle A, \mathrm{E}, \urcorner\rangle, \langle B, \mathrm{E}, \urcorner\rangle$ の言葉でどのように表わされるであろうか？

$a \in A$ なる $a$ をとってきて $a \in \Gamma(U)$ とすれば $f \circ a$ は $\langle B, \mathrm{E}, \urcorner \rangle$ における $\Gamma(U)$ の元になっている筈である．いま $f \circ a$ を $f(a)$ とかくことにすれば（前の $f$ と区別すべきであるが同じ記号を用いることにする），$f: A \longrightarrow B$ となって次の条件をみたすことは明らかであろう．

$$\mathrm{E}f(a) = \mathrm{E}a,$$
$$f(a \urcorner U) = f(a) \urcorner U.$$

いま逆に $f: A \longrightarrow B$ でこの二つの条件をみたしている $f$ があたえられているとする．このとき $A$ を表わす $p_1: Y_1 \longrightarrow X$ の $Y_1$ の元は $(x, a)$ の形の代表元をもつから

$$f(x, a) = (x, f(a))$$

によって新しい $f$ を定義すれば，$B$ を表わす $p_2: Y_2 \longrightarrow X$ をとれば $f: Y_1 \longrightarrow Y_2$ が $Y_1$ から $Y_2$ への射になっていることは明らかであろう．

以下において $f$ が層から層への射であるというときには上の形の都合のよい方をとって考えることにする．念の為に $F, r$ の形でも考えれば $F(U) = \Gamma(U)$ であるから

$$f_U: F^A(U) \longrightarrow F^B(U),$$
$$U \subseteq V \Longrightarrow f_U \circ r_{UV}{}^A = r_{UV}{}^B \circ f_V$$

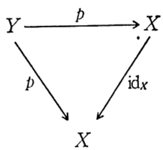
をみたす $f_U$ がすべての $U \in \mathfrak{O}(X)$ に対してあたえられていることが射 $f$ があたえられていることを意味する．上で $A, B$ の添字はそれぞれ層 $A$ と層 $B$ における $F$ および $r$ を意味するものである．

## 6. $\Omega$ の性質

$\mathrm{id}_X: X \longrightarrow X$ を考える．ここで $\mathrm{id}_X$ は $X$ から $X$ への恒等写像である．明らかにこれは一つの $X$ の上の層となっている．この層のことを $1_X$ または単に $1$ とかく．

層 $1$ は特殊な性質をもっている．いま任意の層 $p: Y \longrightarrow X$ を考えると，$Y$ から $1$ への射は次の図から明らかなように $p$ 唯一つしかない．すなわちどんな層をとっても $1$ への射は唯一つ存在している．したがって $1$ への射と

いうときはそれ以上断る必要がない.




次に $t: X \longrightarrow \Omega$ なる局所同相写像 $t$ を

$$t(x)=(x, X)$$

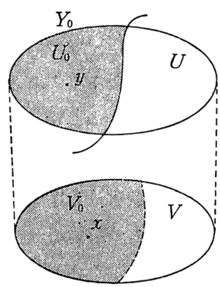
によって定義することにすれば，明らかに $t$ は $t: 1 \longrightarrow \Omega$ なる射になっている.

さて $p: Y \longrightarrow X$ を層として $Y_0 \subseteq Y$ を $Y$ の開集合として $p_0 = p \upharpoonright Y_0$ とすれば $p_0: Y_0 \longrightarrow X$ も明らかに $X$ の上の層となっている. 更に $Y_0$ から $Y$ への恒等写像は $Y_0$ から $Y$ への射になっている. いまこの状況で $Y$ から $\Omega$ への射を定義することを考える.

$y \in Y$ を任意にとって $p(y)=x$ とすれば $y$ の近傍 $U$ と $x$ の近傍 $V$ とをとって

$$p: U \longrightarrow V$$

が同相写像であるようにできる（正確には $p$ の代りに $p \upharpoonright U$ とかくべきであるが).



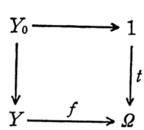

いま $U_0$ と $V_0$ を

$$U_0 = Y_0 \cap U, \quad V_0 = p(U_0)$$

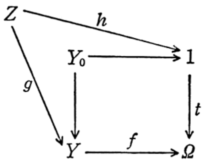
と定義して

$$f(y)=(x, V_0) \in \Omega$$

によって $f$ を定義する. このとき $f$ が $f: Y \longrightarrow \Omega$ なる射であって右の図が可換であることは明らかであろう.



ここに $Y_0 \longrightarrow 1$ は $Y_0$ から1への唯一つしかない射を意味しており，$Y_0 \longrightarrow Y$ は $Y_0$ から $Y$ への恒等写像を意味している．




いま更に $X$ の上の層 $Z$ があたえられていて

$$h: Z \longrightarrow 1, \quad g: Z \longrightarrow Y$$

はともに射であって右の図が可換である．すなわち

$$fg = th$$

が成立しているものとする．

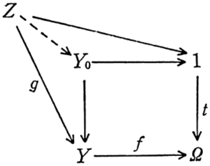
$z \in Z$ として $p(z) = x$ とすれば（同じ $p$ を $p: Z \longrightarrow X$, $p: Y \longrightarrow X$ と混同して用いますが，本当は区別して別の記号を使わなければならない所です．混乱しないように注意して下さい），$fg = th$ の意味は

$$fg(z) = (x, X)$$

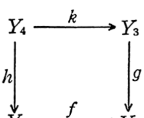
であるから

$$g(z) \in Y_0$$

を意味することになる．すなわち $g: Z \longrightarrow Y_0$ と $g$ は再び $Z$ から $Y_0$ への射となっている．いいかえれば右の図が完全に可換になるように $Z$ から $Y_0$ への射----→が唯一つ存在することがわかる．

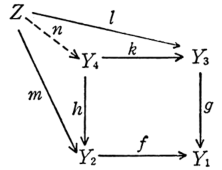



このような状況はしばしば出てくるので，もう少し一般的な状況で有用な概念を定義することにする．いま考える位相空間をすべて $X$ の上の層，位相空間から位相空間への写像はすべて層から層への射とする．




いま右の図は可換であるとする．きちんといえば

$$fh = gk$$




が成立している．このとき上の図が $Y_2 \xrightarrow{f} Y_1 \xleftarrow{g} Y_3$ の pullback であるということを，右の図のようなどんな $Z$ と $l, m$ に対しても，もしこの図が可換であれば，すなわちもっと正確にいえば

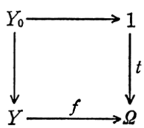
$$fm=gl$$

が成立していれば，上の図の -----> の部分 $n\colon Z \longrightarrow Y_4$ を付加えた上でこの図が可換になっているような $n$，もっと正確にいえば

$$m=hn \quad で \quad l=kn$$

となるような $n$ が唯一通り存在することと定義する．

この pullback という術語を用いれば，$\Omega$ の前にのべた性質は，$Y_0 \subseteq Y$ が $Y$ の開集合であるとき，右の図が $Y \xrightarrow{f} \Omega \xleftarrow{t} 1$ の pullback であるような $f$ が存在することを意味している．




この $\Omega$ の性質はあとでトポス (topos) を議論するときに中心的な役割を果すものである．

## 7. 層の直積

$p_1\colon Y_1 \longrightarrow X$ と $p_2\colon Y_2 \longrightarrow X$ を $X$ の上の二つの層とする．いまこの二つの層の直積を定義しよう．この直積は集合としての直積と異なるのでしばしば $Y_1 \times_X Y_2$ とかかれるが，ここでは単に，$Y_1 \times Y_2$ とかくことにする．$X$ の上の層としての直積であることを，したがって集合としての直積とは全然異なることを銘記しておいてほしい．まず，

$$Y_1 \times Y_2 = \{(y_1, y_2) | y_1 \in Y_1 \wedge y_2 \in Y_2 \wedge p_1(y_1) = p_2(y_2)\}$$

と $Y_1 \times Y_2$ を定義する．

いま $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ として $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x$ とするとき

$$p(y_1, y_2) = x$$

として $p: Y_1\times Y_2 \longrightarrow X$ を定義する.

さて $Y_1\times Y_2$ に位相を導入する為にやはり $(y_1, y_2)\in Y_1\times Y_2$ で $p_1(y_1)=p_2(y_2)=x_0$ とする.

$y_1$ の近傍 $U_1$ と $x_0$ の近傍 $V_1$ をとって $p$ が $U_1$ から $V_1$ への同相写像になっているようにできる. 同様に $y_2$ の近傍 $U_2$ と $x_0$ の近傍 $V_2$ とをとって $p$ が $U_2$ から $V_2$ への同相写像になっているようにできる. いま $V=V_1\cap V_2$ とおけば $V$ は $x_0$ の近傍であって $a_1, a_2$ はそれぞれ $V$ から $Y_1$ と $Y_2$ のなかへの同相写像になっている.

いま $(y_1, y_2)$ の近傍を

$$\{(a_1(x), a_2(x))|x\in V\}$$

の形の集合と定義すれば, 明らかに $Y_1\times Y_2$ は位相空間となり $p$: $Y_1\times Y_2 \longrightarrow X$ が $X$ の上の層になっていることがわかる. この層のことを再び $Y_1\times Y_2$ で表わすことにする.

さて $(y_1, y_2)\in Y_1\times Y_2$ とするとき

$$\pi_1(y_1, y_2)=y_1,$$

$$\pi_2(y_1, y_2)=y_2$$

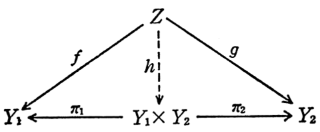
によって $\pi_1$ と $\pi_2$ とを定義すれば, 明らかに

$$\pi_1:\ Y_1\times Y_2 \longrightarrow Y_1,$$

$$\pi_2:\ Y_1\times Y_2 \longrightarrow Y_2$$

は共に射になっている.

いま直積の重要な性質を調べるために $Z$ を $X$ の上の層で(正確にいえば, $p: Z\longrightarrow X$ が層で), 図のように




$$f:\ Z \longrightarrow Y_1,$$

$$g:\ Z \longrightarrow Y_2$$

が二つの射であるとする.

このとき $z \in Z$ とすれば, 明らかに

$$p_1(f(z)) = p_2(g(z)) = p(z)$$

となっているから

$$(f(z), g(z)) \in Y_1 \times Y_2$$

となっている. したがって

$$h(z) = (f(z), g(z))$$

とおけば $h$ は $h: Z \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ なる射であって明らかに図の $\overset{h}{\dashrightarrow}$ を加えたものが可換である. すなわち

$$\pi_1 h = f,$$

$$\pi_2 h = g$$

が成立する. しかもこのような $h$ が唯一通りに定まることは明らかであろう. これが直積を定める基本的な性質である.

さて我々は $p_1: Y_1 \longrightarrow X$, $p_2: Y_2 \longrightarrow X$ なる形で直積を定義したが, もし $\langle A, \mathrm{E}, \urcorner \rangle$ および $\langle B, \mathrm{E}, \urcorner \rangle$ なる形から出発して層の直積を定義するときはどうしたらよいだろうか? このときは

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B \wedge \mathrm{E}a = \mathrm{E}b\},$$

$$(a, b) \urcorner U = (a \urcorner U, b \urcorner U),$$

$$(a, b) \in A \times B \Longrightarrow \mathrm{E}(a, b) = \mathrm{E}a = \mathrm{E}b$$

によって $\langle A \times B, \mathrm{E}, \urcorner \rangle$ を定義するのである.

この定義が丁度層として上の定義と一致することは演習問題として残しておきたい.

更にこの定義での $\pi_1: A \times B \longrightarrow A$ および $\pi_2: A \times B \longrightarrow B$ なる射は次の定義であたえられる.

$$\pi_1(a, b) = a,$$

$$\pi_2(a, b) = b.$$

## 8. 層の巾

層の巾を定義する為に，$X$ の上の二つの層が $\langle A, \mathrm{E}, \urcorner\rangle$ と $\langle B, \mathrm{E}, \urcorner\rangle$ の形で与えられているとして，$B^A$ なる $X$ の上の層を定義しよう.

まず $B^A$ を集合として次の如く定義しよう.

$$B^A=\{(f, V)\,|\,V\in\mathfrak{O}(X)\wedge f\colon A\longrightarrow B$$
$$\wedge\,\forall a\in A(\mathrm{E}f(a)=V\cap \mathrm{E}a\wedge\forall U\in\mathfrak{O}(X)(f(a\urcorner U)=f(a)\urcorner U))\}$$

ここに $f\colon A\longrightarrow B$ は任意の関数であって一般には射でないことに注意してほしい.

まず $(f, V)\in B^A$ のときに

$$\mathrm{E}(f, V)=V$$

と定義する．したがって $(f, V)\in B^A$ の条件は

$$\mathrm{E}f(a)=\mathrm{E}f\cap\mathrm{E}a,$$
$$f(a\urcorner U)=f(a)\urcorner U$$

とかき表わすことができる.

以下 $(f, \mathrm{E}f)\in B^A$ なる $(f, \mathrm{E}f)$ を単に $f\in B^A$ とかくことにする.

$f\in B^A$ のとき任意の $U\in\mathfrak{O}(X)$ に対して $f\urcorner U$ を次の式によって定義する.

$$(f\urcorner U)(a)=f(a)\urcorner U,$$
$$\mathrm{E}(f\urcorner U)=\mathrm{E}f\cap U.$$

明らかに $f\urcorner U\colon A\longrightarrow B$ であって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((f\urcorner U)(a))&=\mathrm{E}(f(a)\urcorner U)\\&=\mathrm{E}f(a)\cap U\\&=\mathrm{E}f\cap\mathrm{E}a\cap U\\&=\mathrm{E}(f\urcorner U)\cap\mathrm{E}a.\end{aligned}$$

またさらに

$$\begin{aligned}(f\urcorner U)(a\urcorner V)&=f(a\urcorner V)\urcorner U\\&=(f(a)\urcorner V)\urcorner U\\&=(f(a)\urcorner U)\urcorner V\end{aligned}$$

$$=((f\urcorner U)(a))\urcorner V$$

が成立するから $f\urcorner U\in B^A$ がわかる．

次に $B^A$ が前層であることをみよう．$f\in B^A$ として

0) $$(f\urcorner\phi)(a)=f(a)\urcorner\phi.$$

これは唯一通り

$$\mathrm{E}(f\urcorner\phi)=\mathrm{E}f\cap\phi=\phi$$

であるから $f\urcorner\phi$ が唯一通りのことがわかる．

1) $$(f\urcorner\mathrm{E}f)(a)=f(a)\urcorner\mathrm{E}f.$$

ところで $\mathrm{E}f(a)=\mathrm{E}f\cap\mathrm{E}a\subseteq\mathrm{E}f$ であるから

$$(f\urcorner\mathrm{E}f)(a)=f(a),$$

$$\mathrm{E}(f\urcorner\mathrm{E}f)=\mathrm{E}f\cap\mathrm{E}f=\mathrm{E}f.$$

以上によって $f\urcorner\mathrm{E}f=f$ がわかる．

2) $$\mathrm{E}(f\urcorner U)=\mathrm{E}f\cap U.$$

これは定義そのものだからよい．

3) $$\begin{aligned}((f\urcorner U)\urcorner V)(a)&=((f\urcorner U)(a))\urcorner V\\&=(f(a)\urcorner U)\urcorner V\\&=f(a)\urcorner U\cap V\\&=(f\urcorner U\cap V)(a).\end{aligned}$$

またさらに

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((f\urcorner U)\urcorner V)&=\mathrm{E}(f\urcorner U)\cap V\\&=\mathrm{E}f\cap U\cap V\\&=\mathrm{E}(f\urcorner U\cap V)\end{aligned}$$

となるので $(f\urcorner U)\urcorner V=f\urcorner U\cap V$ がわかる．

さて次に $B^A$ が層になることをみることにしよう．このために $F$ を $B^A$ の互いに両立する元の集りとしよう．このとき $\bigcup F$ が唯一通り存在することをいえばよい．

いま $g$ を次の式によって定義する．

$$\mathrm{E}g=\bigcup_{f\in F}\mathrm{E}f.$$

さて次に $a\in A$ として $g(a)$ を定義することを考えよう．このために $F_a$ を次の式によって定義する．

$$F_a=\{f(a)|f\in F\}.$$

いま $b_1=f_1(a), b_2=f_2(a)$ が共に $F_a$ の元であるとするとき，$b_1$ と $b_2$ とが両立することを証明しよう．

$$\begin{aligned} f_1(a)\urcorner \mathrm{E}f_2(a)&=f_1(a)\urcorner \mathrm{E}f_2\frown \mathrm{E}a \\ &=f_1(a)\urcorner \mathrm{E}f_2 \qquad (\mathrm{E}f_1(a)\subseteq \mathrm{E}a\ \text{だから}) \\ &=(f_1\urcorner \mathrm{E}f_2)(a). \end{aligned}$$

ところで $f_1$ と $f_2$ とが両立する仮定から

$$f_1\urcorner \mathrm{E}f_2=f_2\urcorner \mathrm{E}f_1$$

であるから上の推論を逆に行って

$$(f_1(a)\urcorner \mathrm{E}f_2)(a)=f_2(a)\urcorner \mathrm{E}f_1(a)$$

が出てくる．したがって $g(a)$ を次の式で定義することができる．

$$g(a)=\bigcup\{f(a)|f\in F\}.$$

さて次に $g\in B^A$ を証明しよう．まず

$$\begin{aligned} \mathrm{E}g(a)&=\bigcup_{f\in F}\mathrm{E}f(a) \\ &=\bigcup_{f\in F}(\mathrm{E}a\frown \mathrm{E}f) \\ &=\mathrm{E}a\frown\bigcup_{f\in F}\mathrm{E}f \\ &=\mathrm{E}a\frown \mathrm{E}g \end{aligned}$$

となって最初の条件が証明された．次に第二の条件は

$$\begin{aligned} g(a\urcorner U)&=\bigcup_{f\in F}f(a\urcorner U) \\ &=\bigcup_{f\in F}(f(a)\urcorner U) \end{aligned}$$

であるから一般に $G\subseteq B$ として

$$(\bigcup G)\urcorner U=\bigcup_{b\in G}(b\urcorner U)$$

を証明すれば充分であるが，これは $\bigcup G$ の定義と $B$ が層であることから明らかである．

更に $g$ が $\bigcup F$ の条件をみたすことを証明する．まず $f\in F$ として $g\urcorner \mathrm{E}f=f$ を証明する．まず

$$\mathrm{E}(g\urcorner \mathrm{E}f)=\mathrm{E}g\frown\mathrm{E}f=\mathrm{E}f$$

だから任意の $a\in A$ をとって $(g\urcorner \mathrm{E}f)(a)=f(a)$ を証明すればよい．これは次のことからわかる．

$$\begin{aligned}(g\urcorner \mathrm{E}f)(a)&=g(a)\urcorner \mathrm{E}f\\&=g(a)\urcorner \mathrm{E}f(a)\qquad(\mathrm{E}g(a)\subseteq\mathrm{E}a\ \text{だから})\\&=f(a).\qquad(g(a)=\bigcup_{f\in F}f(a)\ \text{だから})\end{aligned}$$

最後にこのように $g$ が唯一通りであることを証明するために，もう一つあったとしてこれを $g_1$ とする．まず

$$\mathrm{E}g_1=\mathrm{E}g$$

は共に $\bigcup_{f\in F}\mathrm{E}f$ に等しいことから明らかである．したがって $a\in A$ として

$$g_1(a)=g(a)=\bigcup_{f\in F}f(a)$$

を証明すれば充分である．ところでこれは $f\in F$ として

$$g_1(a)\urcorner \mathrm{E}f=(g_1\urcorner \mathrm{E}f)(a)=f(a)$$

と

$$\mathrm{E}g_1(a)=\mathrm{E}g_1\frown\mathrm{E}a=\mathrm{E}a\frown\bigcup_{f\in F}\mathrm{E}f$$

と $B$ が層であることから明らかである．

さて $B^A$ が層であることが明らかになったので，層としての $B^A$ についての演算

$$\mathrm{ev}\cdot\ A\times B^A\longrightarrow B$$

という形の射を定義してその性質を証明することにしよう．このため $(a,f)\in A\times B^A$ となる任意の $(a,f)$ をとって考えよう．$A\times B^A$ の定義より

$$\mathrm{E}(a,f)=\mathrm{E}a=\mathrm{E}f=\mathrm{E}f(a)$$

が成立する．

いま ev（evaluation の略）を次の式によって定義する．

$$\mathrm{ev}(a,f)=f(a).$$

上の式によって $\mathrm{E}\,\mathrm{ev}(a,f)=\mathrm{E}f(a)=\mathrm{E}(a,f)$ であるから ev が射であることを証明するためには

$$\mathrm{ev}((a,f)\urcorner U)=\mathrm{ev}(a,f)\urcorner U$$

を証明すれば充分である．ところで

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}((a,f)\urcorner U)&=\mathrm{ev}(a\urcorner U,f\urcorner U)\\&=(f\urcorner U)(a\urcorner U)\\&=f(a\urcorner U)\urcorner U\\&=f(a)\urcorner U\end{aligned}$$

であるから明らかである．

さて次に $A,B,C$ は $X$ の上の層として，$g:A\times C\longrightarrow B$ なる射が与えられているものとして

$$\hat{g}:C\longrightarrow B^A$$

なる射を定義しよう．このため $c\in C$ なる任意の $c$ をとって，この $c$ に対応する $f:A\longrightarrow B$（ただの関数であって射ではない）を次の式によって定義する．

$$f(a)=g(a\urcorner\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c,c\urcorner\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c).$$

まず

$$\mathrm{E}(a\urcorner\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c)=\mathrm{E}(c\urcorner\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c)=\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c$$

であるから $f(a)$ は定義されていて

$$\mathrm{E}f(a)=\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c$$

が成立する．

いま更に $\mathrm{E}f=\mathrm{E}c$ と定義すれば $\mathrm{E}f(a)=\mathrm{E}f\frown\mathrm{E}a$ は上の式により直ちに出るから，$f\in B^A$ をいうためには次の式を証明すれば充分である．

$$f(a\urcorner U)=f(a)\urcorner U.$$

ところでこれは

$$\begin{aligned}f(a\urcorner U)&=g(a\urcorner\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c\frown U,c\urcorner\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c\frown U)\\&=g(a\urcorner\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c,c\urcorner\mathrm{E}a\frown\mathrm{E}c)\urcorner U\end{aligned}$$

となるから明らかである．

いま $f\in B^A$ が証明されたから，$\hat{g}$ を

$$\hat{g}(c)=f$$

によって定義すれば，$\hat{g}$ は関数として $\hat{g}: C\longrightarrow B^A$ であることがわかる．いま $\hat{g}$ が射であることを証明しよう．射の第一の条件は

$$\mathrm{E}\hat{g}(c)=\mathrm{E}f=\mathrm{E}c$$

によって明らかであろう．第二の条件は

$$\hat{g}(c\urcorner U)=\hat{g}(c)\urcorner U$$

である．これを証明するためには

$$\mathrm{E}(\hat{g}(c\urcorner U))=\mathrm{E}(\hat{g}(c)\urcorner U)$$

と

$$a\in A\Longrightarrow(\hat{g}(c\urcorner U))(a)=(\hat{g}(c)\urcorner U)(a)$$

との二つを証明すればよい．前者は

$$\mathrm{E}(\hat{g}(c\urcorner U))=\mathrm{E}(c\urcorner U)=\mathrm{E}c\cap U=\mathrm{E}(\hat{g}(c)\urcorner U)$$

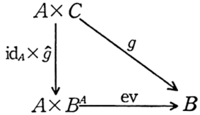
から明らかであり，後者は

$$\begin{aligned}(\hat{g}(c\urcorner U))(a)&=g(a\urcorner\mathrm{E}a\cap\mathrm{E}(c\urcorner U),(c\urcorner U)\urcorner\mathrm{E}a\cap\mathrm{E}(c\urcorner U))\\&=g(a\urcorner\mathrm{E}a\cap\mathrm{E}c\cap U,c\urcorner\mathrm{E}a\cap\mathrm{E}c\cap U)\\&=g(a\urcorner\mathrm{E}a\cap\mathrm{E}c,c\urcorner\mathrm{E}a\cap\mathrm{E}c)\urcorner U\\&=\hat{g}(c)\urcorner U\end{aligned}$$

から明らかである．

さて $\hat{g}: C\longrightarrow B^A$ が射であることがわかったから，$\hat{g}$ の性質を考えよう．

いま $g: A\times C\longrightarrow B$ が射として，上の $\hat{g}$ を作ることにする．このとき次の図は可換である．




きちんと表現すれば

$$\mathrm{ev}\circ(\mathrm{id}_A\times\hat{g})=g$$

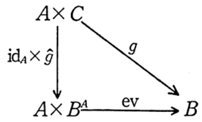
である．ここに $\mathrm{id}_A$ は $A$ から $A$ への恒等写像の射であり，$\mathrm{id}_A\times\hat{g}$ は $(a,c)\in A\times C$ なる $(a,c)$ に対して $(a,\hat{g}(c))$ を対応させる写像で，これが，$A\times C\longrightarrow A\times B^A$ なる射になることは明らかであろう．

さてこの証明は

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}(a,\hat{g}(c))&=(\hat{g}(c))(a)\\&=g(a\urcorner \mathrm{E}a\wedge\mathrm{E}c,\ c\urcorner \mathrm{E}a\wedge\mathrm{E}c)\\&=g(a,c)\qquad(\mathrm{E}a=\mathrm{E}c\ \text{を用いた})\end{aligned}$$

によって明らかである．

次にこのような $\hat{g}$ が唯一通りであることを証明しよう．したがって $\hat{g}$ は今度は次の図が可換であるような任意の $C\longrightarrow B^A$ なる射であるとする．




このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{g}(c)(a))&=\mathrm{E}(\hat{g}(c))\wedge\mathrm{E}a\\&=\mathrm{E}c\wedge\mathrm{E}a\end{aligned}$$

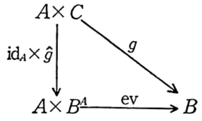
であるから

$$\mathrm{ev}(a,\hat{g}(c))=(\hat{g}(c))(a)$$

は $(\hat{g}(c))(a)\urcorner \mathrm{E}a\wedge\mathrm{E}c$ のときだけ考えればよい．したがって $\mathrm{E}a=\mathrm{E}c$ のときに唯一通りであることを証明すれば充分である．ところでこれは

$$(\hat{g}(c))(a)=\mathrm{ev}(a,\hat{g}(c))=g(a,c)$$

となるから唯一通りであることが証明された．



以上によって $B^A$ の主な性質として，任意の $g: A\times C \longrightarrow B$ について前の図が可換となるような $\hat{g}$ が唯一通り存在することがわかった．

## 9. 空間性トポス Top($X$)

位相空間$X$の上の層全体の集りを Top($X$) とかいて空間性トポス (spatial topos) という．

いま，$X$ と $Y$ とを二つの位相空間で

$$f: X \longrightarrow Y$$

を $X$ から $Y$ への連続関数とするとき（局所同相ではないから注意！），$f$ が Top($X$) と Top($Y$) との間にどのような関係をあたえるかを調べることにする．

まず

$$f^*: \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$

なる $f^*$ を定義するために，任意の $T\in \mathrm{Top}(Y)$ を $p: T \longrightarrow Y$ の形でとってきて

$$f^*(T)=\{(x,t)|x\in X\wedge t\in T\wedge f(x)=p(t)\}$$

によって $f^*$ を定義する．

$f^*(T)$ に位相を入れるために $(x_0,t_0)\in f^*(T)$ として $f(x_0)=p(t_0)=y_0$ とする．充分小さい $x_0$ の近傍 $U$, $y_0$ の近傍 $V$, $t_0$ の近傍 $W$ をとれば，$p$ は $W$ から $V$ の上への同相写像であって

$$U\subseteq f^{-1}(V)$$

が成立するようにできる．このとき $(x_0,t_0)$ の近傍を

$$\{(x,t)\in f^*(T)|x\in U\wedge t\in W\}$$

の形と定義すれば $f^*(T)$ が位相空間になっていることは明らかである．更に $(x,t)\in f^*(T)$ に対して

$$p(x,t)=x$$

と定義すれば $f^*(T)\in \mathrm{Top}(X)$ であることも明らかであろう．

$f^*$ は Top($Y$) の色々な操作をそのまま Top($X$) に移す著しい性質をも

っている．例えば $T_1, T_2 \in \mathrm{Top}(Y)$ とするとき

$$f^*(T_1 \times T_2) \simeq f^*(T_1) \times f^*(T_2)$$

となっている．ここに $\simeq$ は $X$ の上の層として同形という意味であって実際には $=$ だと思ってしまっても構わない．勿論，左辺の $\times$ は $Y$ の上の層としての直積で右辺の $\times$ は $X$ の上の層としての直積である．このことは

$$\begin{aligned} f^*(T_1 \times T_2) = \{(x, (t_1, t_2)) \mid x \in X \wedge t_1 \in T_1 \wedge t_2 \in T_2 \\ \wedge f(x) = p(t_1) = p(t_2)\}, \\ f^*(T_1) \times f^*(T_2) = \{((x, t_1), (x, t_2)) \mid x \in X \wedge t_1 \in T_1 \wedge t_2 \in T_2 \\ \wedge f(x) = p(t_1) = p(t_2)\} \end{aligned}$$

であるから

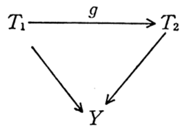
$$(x, (t_1, t_2)) \longrightarrow ((x, t_1), (x, t_2))$$

なる対応が同形写像になっていることから明らかであろう．

更に $T_1, T_2 \in \mathrm{Top}(Y)$ と $g: T_1 \longrightarrow T_2$ なる射があたえられている場合に

$$f^*g: f^*(T_1) \longrightarrow f^*(T_2)$$

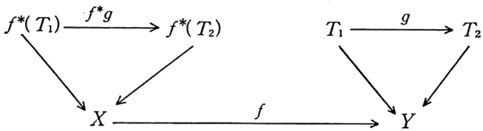
なる射をつくることを考えよう．




このため $(x, t_1) \in f^*(T_1)$ とする．

$$(f^*g)(x, t_1) = (x, g(t_1))$$

によって定義する．




$g: T_1 \longrightarrow T_2$ は局所同相写像であるから，$f^*g: f^*(T_1) \longrightarrow f^*(T_2)$ が局所同相写像になっていてしたがって射であることはほとんど自明であろう．以下に $f^*(T)$ のことを単に $f^*T$ ともかくことにする．

次に $X$ の上の層 $p: S \longrightarrow X$ があたえられたときに $f_*S$ なる $Y$ の上

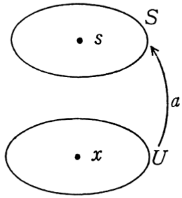
の層を作ることを考えよう．このために，まず層 $S$ についての $\Gamma(U)$ の定義を思い出すことにする．ここに $U \in \mathfrak{O}(X)$ である．

$a \in \Gamma(U)$ の定義は $U$ を $X$ の上の層と考えた上で $a\colon U \longrightarrow S$ が射であることと思ってもよいし，$a\colon U \longrightarrow S$ が連続で $pa$ が $U$ の上の恒等写像になるものと思ってもよいし，この連続写像を $S$ のなかへの同相写像としてもよい．

簡単な性質として，$s \in S$ で $p(s)=x$ とするとき，$x$ の適当な近傍 $U$ と $a \in \Gamma(U)$ をとって

$$\{a(x_1) | x_1 \in U\}$$

が $s$ の近傍になっているようにできることである．




さてこの $\Gamma$ を用いて $f_*S$ を次の式で定義する．

$$f_*S = \{(a, y) | \exists V \in \mathfrak{O}(Y)(y \in V \wedge a \in \Gamma(f^{-1}(V)))\}/\equiv.$$

ここに $(a_1, y) \equiv (a_2, y)$ を次の式で定義する．

$$\exists V_1 \in \mathfrak{O}(Y)(y \in V_1 \wedge a_1 \upharpoonright f^{-1}(V_1) = a_2 \upharpoonright f^{-1}(V_1)).$$

勿論 $y_1 \neq y_2$ ならば $(a_1, y_1) \not\equiv (a_2, y_2)$ と定義する．

いま $(a, y)$ を $f_*S$ の元の代表元とするとき

$$p(a, y) = y$$

によって定義する．更に $f_*S$ に位相を入れるために，$(a, y) \in f_*S$（本当はこれは元の代表元であるが，以下このような省略は断りなしに用いる）の近傍を

$$\{(a, y_1) | y_1 \in V\}$$

の形とする．ここに $V$ は $a\in\Gamma(f^{-1}(V))$ となる $f_*S$ の定義に出てくる $V$ である．$(a, y)$ は $\equiv$ の定義により色々な形で表わされるからその代表元のとり方によって沢山近傍が存在することになる．

このように $f_*S$ を定義すると $f_*S$ が $Y$ の上の層になっていることは明らかであろう．

ここにちょっとした注意をすれば，$y\in V\wedge f^{-1}(V)=\phi$ なる $V$ が存在すれば $\Gamma(f^{-1}(V))=\Gamma(\phi)\ni\phi$ だから $(\phi, y)$ が $f_*S$ の元になっているから $y$ の上の $f_*S$ の元は唯一つ存在することになる．

次に $X$ の上の層 $S_1, S_2$ と $g: S_1\longrightarrow S_2$ なる射があたえられたときに $f_*g: f_*S_1\longrightarrow f_*S_2$ なる射を定義することを考えよう．この定義は常識通りに

$$(f_*g)(a, y)=(g(a), y)$$

によってあたえられる．これが射になっていることは明らかであろう．

さて $f^*$ と $f_*$ についての大切な定理を証明することにしよう．いま $p$: $S\longrightarrow X$ を $X$ の上の層，$p$: $T\longrightarrow Y$ を $Y$ の上の層とする．このとき $f^*T$ と $S$ とは $X$ の上の層であり，$T$ と $f_*S$ とは $Y$ の上の層である．いま

$$\mathrm{Hom}(f^*T, S)\quad \text{および}\quad \mathrm{Hom}(T, f_*S)$$

によってそれぞれ $f^*T$ から $S$ への射の全体の集合，および $T$ から $f_*S$ への射の全体の集合を表わすことにすれば，我々の証明しようという定理は次の形である．

$$\mathrm{Hom}(T, f_*S)\simeq\mathrm{Hom}(f^*T, S).$$

ここで $\simeq$ の意味は

$$\sharp: \mathrm{Hom}(T, f_*S)\longrightarrow\mathrm{Hom}(f^*T, S)$$

なる写像 $\sharp$ を定義して，$\sharp$ が一対一で $\mathrm{Hom}(f^*T, S)$ の上への写像であるようにできることを意味する．

このため，$g$: $T\longrightarrow f_*S$ を射として，$g^\sharp$: $f^*T\longrightarrow S$ をまず定義する．

いま $t\in T$ として

$$g(t)=(a, y)$$

とする．ここに $g$ が射のことと $f_*S$ の定義から，次の条件がみたされているような $V$ がある．

$$a\in\Gamma(f^{-1}(V)),$$
$$y\in V\in\mathfrak{O}(Y),$$
$$p(t)=y.$$

このとき $g^\sharp: f^*T\longrightarrow S$ を次の式で定義する．

$$g^\sharp(x, t)=a(x).$$

ここに $(x, t)\in f^*T$ とする．

$$p(g^\sharp(x, t))=p(a(x))=x=p(x, t)$$

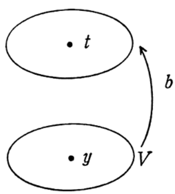
となるから $g^\sharp$ が射であることをいう為には，$g^\sharp$ が連続であることを証明すれば充分である．

これは $a(x)$ の近傍が

$$\{a(x_1)|x_1\in U\}$$

の形であたえられているとして，必要ならば上の $V$ を小さくとることによって，次の図のような $b$，すなわち

$$t=b(y)\wedge b\in\Gamma(V)$$




なる $b$ が存在するものとしてよいから（今後，$V$はこの条件をみたしているものとする）

$$\{(x_1, b(y_1))|f(x_1)=y_1\wedge x_1\in U\}$$

なる $(x, t)$ の近傍をとればその $g^\sharp$ による像は $\{a(x_1)|x_1\in U\}$ のなかに含

まれてしまうからよい.

次に # が一対一であることをいおう.

このため, $g_1\colon T \longrightarrow f_*S$, $g_2\colon T \longrightarrow f_*S$ が二つの射であって,

$$g_1(t)=(a_1, y)$$

$$g_2(t)=(a_2, y)$$

であってどんな $y$ の近傍 $V_1$ をとっても

$$a_1\upharpoonright f^{-1}(V_1)\neq a_2\upharpoonright f^{-1}(V_1)$$

であったとする.

いま $V, b$ を上にとったものとする. このとき $x_1\in f^{-1}(V)$ で $a_1(x_1)\neq a_2(x_1)$ となるものがあるにちがいない. いま $f(x_1)=y_1, b(y_1)=t_1$ とおけば

$$g_1(t_1)=(a_1, y_1), \quad g_2(t_1)=(a_2, y_1)$$

となって $g_1{}^{\#}(x_1, t_1)=a_1(x_1)\neq a_2(x_1)=g_2{}^{\#}(x_1, t_1)$ となるから $g_1{}^{\#}\neq g_2{}^{\#}$ がわかった.

最後に # が $\mathrm{Hom}(f^*T, S)$ の上への写像になっていることを証明するために

$$h\colon f^*T \longrightarrow S$$

を射として, $(x, t)\in f^*T$ に対して

$$h(x, t)=s$$

となっているものとする.

いま我々は $g\colon T \longrightarrow f_*S$ なる射を定義して, $g^{\#}=h$ になるようにすればよい訳である.

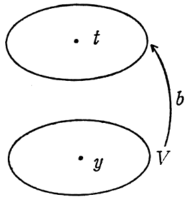
いま $p(t)=y$ とおいて $y$ の充分小さい近傍 $V$ と $b\in\Gamma(V)$ で $t=b(y)$ なる $b$ をとることができる. このとき $x_1\in f^{-1}(V)$ に対して

$$a(x_1)=h(x_1, b(f(x_1)))$$

と定義すれば明らかに $a\in\Gamma(f^{-1}(V))$ となる.

いま $g$ を次の式で定義する.

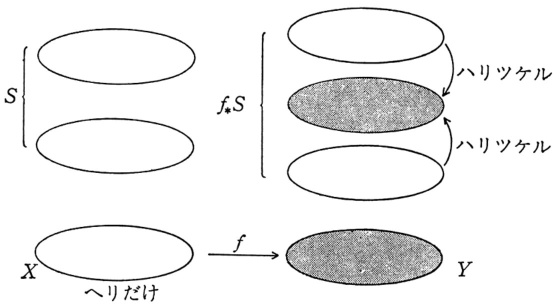
$$g(t)=(a, y)$$




明らかに $g(t)\in f_*S$ であり，$g: T\longrightarrow f_*S$ で射になっている．さらに $g^\sharp=h$ になっていることは作り方から明らかであろう．

以下少しばかり $f_*S$ の例をあげることにしよう．$X\subseteq Y$ で $f$ が $X$ を $Y$ に埋めこむ恒等写像のときを考える．

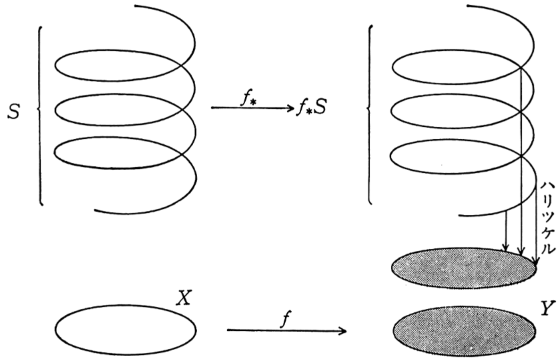
図の説明をすれば，右の図の $f_*S$ は一つの円板にそのへりに相当するも



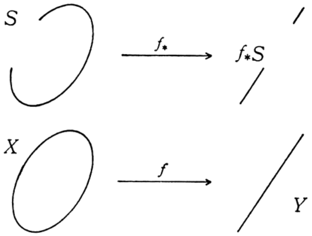

のを二個ハリツケタものである．出来たものは Hausdorff 空間ではないから同じ場所にちがう点が二個存在しても構わない．$f_*S$ に円板の中身ができる理由は $Y$ の円板の内部の開集合を $V$ とするとき，$f^{-1}(V)=\phi$，したがって $\Gamma(f^{-1}(V))$ に唯一個の元が存在するからである．

同様の例を考えて，$X, Y$ はこれと同じ．ただし $S$ は $X$ の上の無限にのびるラセンとする．このとき $f_*S$ はやはりこの無限にのびるラセンを円板のへりにハリツケタものになっている．この場合は一つの場所に無限の点が

ハリツケラレたことになっている.




つぎに $f: X \longrightarrow Y$ が $Y$ の上への写像であるときを考えよう.




この図の説明も明らかであろう. $f_*S$ の真ん中の部分が抜けてしまうのは, $Y$ の真ん中の小さな近傍 $V$ をとるとき, $\Gamma(f^{-1}(V))$ が空集合となってしまって $(a, y)$ なる $a$ に相当するものが存在し得ないからである.

$f^*T$ の方は定義からわかり易いのでこのような図を沢山作って直観的な理解を増して頂きたい.

# 第2章　圏

## 1. 圏の定義

$\mathscr{C}$ が圏であるとは，$\mathscr{C}$ が次の構成要素からできている後にのべる公理をみたすことをいう．

1）対象（object）の集合

対象を $A, B, C, \cdots$ で表わす．

2）射（morphism）の集合

射を $f, g, h, \cdots$ で表わす．

3）dom（domain の略），cod（codomain の略）と表わされる関数

dom も cod も射全体の集合から対象全体の集合への関数である．

$\mathrm{dom}(f)=A$ で $\mathrm{cod}(f)=B$ のとき

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{または} \quad A \xrightarrow{f} B$$

と表わすことにする．$\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f)$ は単に $\mathrm{dom}\, f, \mathrm{cod}\, f$ とかくこともある．

4）二つの射を結合して新しい射をつくる関数 $\circ$

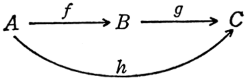
$\circ$ は $\mathrm{dom}(g)=\mathrm{cod}(f)$ なる $g$ と $f$ とに対してだけ $g\circ f$ が定義されて，これが再び射となる．すなわち

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

のときにのみ $g\circ f$ が定義される．

いまこの場合 $g\circ f$ によってできる射を $h$ とかけば，すなわち $h=g\circ f$ ならばあとの公理でわかるように $h: A \longrightarrow C$ となっている．

この場合単に $h=gf$ ともかくことにする．

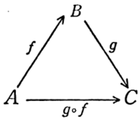



**〔圏の公理群〕**

a) 若し $g\circ f$ が定義されているときには

$$\mathrm{dom}(g\circ f)=\mathrm{dom}(f) \quad \text{で} \quad \mathrm{cod}(g\circ f)=\mathrm{cod}(g)$$

である．すなわち



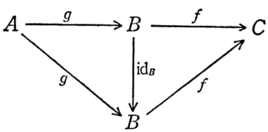

の形になっている．

b)

$$A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \xrightarrow{\ k\ } D$$

のとき，$k\circ(g\circ f)=(k\circ g)\circ f$ が成立する．

c) すべての対象 $B$ に対して $\mathrm{id}_B\colon B\longrightarrow B$ なる射で次の性質をみたすものが存在する．




図のように任意の $A, C, g, f$ をとるときこの図は可換である．すなわち正確にいえば

$$g=\mathrm{id}_B\circ g \quad \text{と} \quad f=f\circ \mathrm{id}_B$$

とが成立する．

圏のことをカテゴリー（category）ということもある．ここで射は抽象

的に考えられていて必ずしも関数を意味しないから注意すべきである（したがって第1章の射より遙かに抽象的である）．したがって $\mathrm{id}_B$ とかいても（第1章の記号とは異なって）恒等写像を意味するとは限らない．dom, cod についても同様である．$f$ は関数とは限らないから dom や cod も普通の関数の場合のようなハッキリとした意味がある訳ではなく，上の公理を満足するという規定があるだけの抽象的な概念である．

**圏の例**

圏の例は今後たくさん出てくるがここでは当り前のものだけをとりあげることにする．

1) Sets

明らかに圏の射は‘関数’の概念を抽象化したものであるから，対象を任意の集合，$f\colon A \longrightarrow B$ なる射は $A$ から $B$ への関数とすれば圏がえられる．この圏のことを集合の圏といって Sets で表わす．

2) Gr

対象は任意の群であるとして，$f\colon A \longrightarrow B$ なる射 $f$ は $A$ から $B$ への準同形とすれば圏が得られる．この圏のことを群の圏といって Gr で表わす．

3) Ab

対象は任意の Abel 群として，$f\colon A \longrightarrow B$ なる射 $f$ は $A$ から $B$ への準同形とすればやはり圏がえられる．この圏のことを Abel 群の圏といって Ab で表わす．

4) $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$

$\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ を圏とする．このとき新しい圏を次のようにつくる．この新しい圏を $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ で表わすことにする．

まず $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ の対象全体の集合を

$$\{(A, B) \mid A \text{ は } \mathscr{C}_1 \text{ の対象で } B \text{ は } \mathscr{C}_2 \text{ の対象である}\}$$

によって定義する．次に $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ の射全体の集合を

$$\{(f, g) \mid f \text{ は } \mathscr{C}_1 \text{ の射で } g \text{ は } \mathscr{C}_2 \text{ の射である}\}$$

によって定義する.

$$(f, g):(A_1, B_1) \longrightarrow (A_2, B_2)$$

を $f\colon A_1 \longrightarrow A_2$ が $\mathscr{C}_1$ で成立して，$g\colon B_1 \longrightarrow B_2$ が $\mathscr{C}_2$ で成立していることと定義すれば明らかに圏を得る．この圏を $\mathscr{C}_1$ と $\mathscr{C}_2$ の直積の圏といって $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ で表わす.

5)　$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$

$\mathscr{C}$ が圏のときに次のように定義される圏を $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で表わし $\mathscr{C}$ の双対圏とよぶ（$\mathscr{C}^{\circ}$ ともしばしばかかれる）.

$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ の対象全体の集合は $\mathscr{C}$ の対象全体の集合と同じであり，$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ の射全体の集合は $\mathscr{C}$ の射全体の集合と同じである．$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ において $f\colon A \longrightarrow B$ が成立するということを次のように定義する.

$$\begin{array}{c} f\colon A \longrightarrow B \text{ が } \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \text{ で成立する.} \\ \Updownarrow \\ f\colon B \longrightarrow A \text{ が } \mathscr{C} \text{ で成立する.} \end{array}$$

図でかけば

$$\begin{array}{ccc} B & & B \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow \ \mathscr{C} & \Leftrightarrow & {\scriptstyle f}\Big\uparrow \ \ \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \\ A & & A \end{array}$$

となる.

6)　Top$(X)$

第1章の Top$(X)$ は圏になっている．この圏での射は第1章の射と定義するのである.

いま圏 $\mathscr{C}$ があって $A, B$ を $\mathscr{C}$ の対象とするとき

$$\mathscr{C}(A, B) = \{f \mid f\colon A \longrightarrow B\}$$

によって $\mathscr{C}(A, B)$ を定義する．$\mathscr{C}(A, B)$ のことを

$$\mathrm{Hom}(A, B) \quad \text{または} \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$$

とかくこともある.

以上でわかるように圏の理論は大変抽象的である．ここでは圏の理論の抽象的な一般論を展開する前に圏について初等的な定義とわかり易い性質についてまずのべることにする．断らない限りは一つの圏を固定してそのなかの対象や射について議論しているものとする．

**定義** $m: A \longrightarrow B$ が mono (モノ，正確には monic) であるということを

$$D \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\ m\ } B$$

なる任意の $D, f_1, f_2$ について $m \circ f_1 = m \circ f_2$ ならば $f_1 = f_2$ が成立することと定義する．

$m$ が mono のとき

$$m:\ A \rightarrowtail B \quad \text{または} \quad A \overset{m}{\rightarrowtail} B$$

と表わす．

圏が Sets, Gr, Ab のときは $f$ が mono ということは '$f$ が一対一' ということと同等になる．しかしここではすべて抽象的に取扱われていることに注意すべきである．

**定義** 圏 $\mathscr{C}$ の対象 $A, B$ があたえられて，

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

なる $f, g$ で $g \circ f = \mathrm{id}_A$ で $f \circ g = \mathrm{id}_B$ なる $f, g$ があるとき $A$ と $B$ とは $\mathscr{C}$ のなかで同等であるという．$\mathscr{C}$ のなかで同等な対象は $\mathscr{C}$ のなかで全く同じ役割を果している．

**定義** $A, B$ を圏 $\mathscr{C}$ の対象とする．もし次の性質をみたす対象 $A \times B$ が $\mathscr{C}$ のなかに存在するとき，$A \times B$ を $A$ と $B$ との直積という．

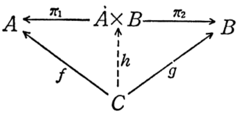
1)
$$A \xleftarrow{\ \pi_1\ } A \times B \xrightarrow{\ \pi_2\ } B$$

なる二つの射 $\pi_1$ と $\pi_2$ とが存在する．

2) 右の図のような任意の $C, f, g$ をとるとき図が可換となるような $h$，すなわち

$$f=\pi_1\circ h$$

$$g=\pi_2\circ h$$



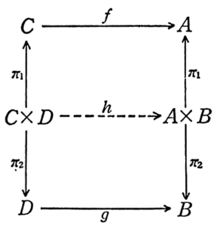

となるような $h$ が唯一通り存在する．

この $h$ を $\langle f,g\rangle$ で表わす．

この直積の定義が Sets, Gr, Ab, Top($X$) でそれぞれの直積を表わしていることは明らかであろう．

$A\times B$ の条件をみたす対象は $\mathscr{C}$ のなかに存在しても唯一通りとは限らない．しかしこの性質をみたす対象はすべて $\mathscr{C}$ のなかで同等になっているのでなんの不便もおこらない．

次に $\mathscr{C}$ の対象 $A,B,C,D$ に対して $A\times B$ と $C\times D$ とが存在するとする．このとき図のような $f,g$ に対して，図が可換になるような $h$ が唯一つ存在する．この $h$ のことを




$$h=f\times g$$

と表わす．ちょっとした注意をすれば $A\times B\xrightarrow{\pi_1}A$ なる $\pi_1$ と $C\times D\xrightarrow{\pi_1}C$ なる $\pi_1$ とは実際には相異なる射であるから本当は異なる記号を用いるべきであるが混乱の恐れがないので同じ記号を用いるのが慣用である．

さて $f\times g$ の存在とその一意性は簡単な演習問題であるから圏に馴れる為に自分で証明してみてほしい．ただし $f$ と $g$ とは関数とは限らないから抽象的な性質だけから証明しなければならない．是非やってみて下さい．

**定義**　いま $A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$ なる状態において

$$C\xrightarrow{e}A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$$

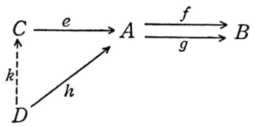
なる射 $e$ が $f$ と $g$ との equaliser であるとは次の二つの条件がみたされることと定義する．

1)　$f\circ e=g\circ e$,

2) 右の図の状態において，もし

$$f\circ h=g\circ h$$

がみたされているならば，右の図が可換となるような $k$，すなわち



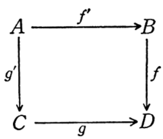

$$h=e\circ k$$

となるような $k$ が唯一通り存在する．

以下我々は圏をすべて抽象的に考えて行くので具体的な圏において equaliser が何になるかは必ずしも必要ではないが，Sets, Gr, Ab, Top$(X)$ についてこれが何になるかを演習問題として考えてほしい．以下色々な定義をする度にこういう演習問題がついているものと思ってほしい．

色々な性質を証明する前にもう一つだけ定義をやって定義を全部すませてしまうことにする．

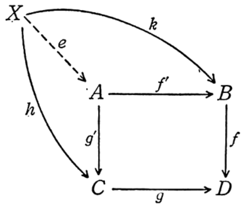
**定義**　右の図が pullback であるということを次の二つの条件がみたされていることと定義する．




1) 図が可換である．すなわち

$$f\circ f'=g\circ g'.$$

2) 右の図の状態があたえられていて可換であるとき，すなわち $f\circ k=g\circ h$ のとき，$\overset{e}{\dashrightarrow}$ を加えたものが可換となるような $e$ が唯一つ存在する．すなわち




$$h=g'\circ e \quad で \quad k=f'\circ e$$

となる $e$ が唯一通り存在する．

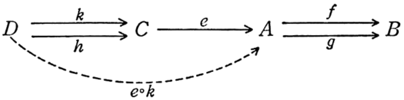
この pullback は第1章ですでに出てきておなじみであるが，ここでは一般の圏での抽象的な定義であるからそのことをハッキリさせる為にもう一度繰り返したのである．Sets, Gr, Ab, Top$(X)$ のなかで pullback がどんなものになっているか考えてみてほしい．

上の $A$ は唯一通りという訳には行かないが，存在するとすれば互いに同等になる．これも簡単だから自分で証明してみてほしい．

さてこの辺りで少しばかり証明もやってみるとする．

**定理 1**　$C \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ において $e$ が $f$ と $g$ との equaliser であれば $e$ は mono である．

証明）



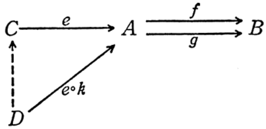

なる $k, h$ で $e \circ k = e \circ h$ とすれば

$$k = h$$

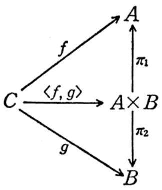
であることを証明すればよい．このため，$e \circ k$ を考えれば

$$f \circ (e \circ k) = g \circ (e \circ k)$$

となる．したがって equaliser の定義から右の図が可換となるような $D$ ----→$C$ は唯一つに限る．ところで $k$ も $h$ もこの条件をみたすから $k=h$ が出てくる．




**定理 2**　右の図の状況において $f$ が mono ならば $\langle f, g\rangle$ も mono である．

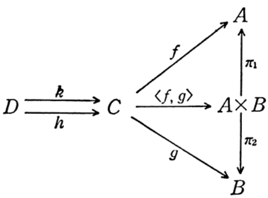



証明）　右の図の状況において図が可換とする．すなわち

$$\langle f, g\rangle \circ k = \langle f, g\rangle \circ h$$

として $k=h$ を証明すればよい．これは

$$\langle f, g\rangle \circ k = \langle f, g\rangle \circ h,$$



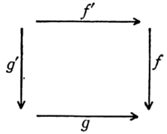

ゆえに

$$\pi_1 \circ \langle f, g\rangle \circ k = \pi_1 \circ \langle f, g\rangle \circ h,$$

ゆえに． $f\circ k=f\circ h$.

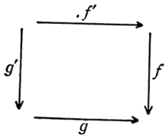
ゆえに $k=h$ （$f$ が mono だから）となって証明された．

**定理 3**

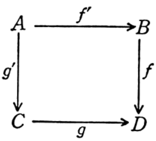



が pullback で $g$ が mono ならば $f'$ も mono である．

証明)




は




の略である．今後混乱の恐れがない場合はこのように省略する．

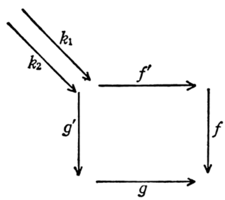
右図のような $k_1, k_2$ で

$$f'\circ k_1=f'\circ k_2$$

がみたされているとして

$$k_1=k_2$$

を証明すればよい．これは次のように順々にわかる．



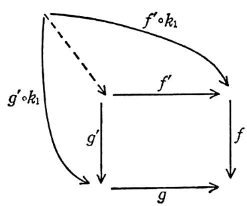

$$f\circ f'\circ k_1=f\circ f'\circ k_2,$$

$$g\circ g'\circ k_1=g\circ g'\circ k_2,$$

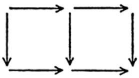
$$g'\circ k_1=g'\circ k_2, \quad (g \text{ が mono だから})$$

$$k_1=k_2.$$

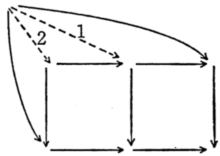
最後の式は右の図で pullback の性質から図が可換となるような----→が唯一通りであって $k_1, k_2$ がともにその性質をみたすことからわかるのである．



**定理 4**　右の図において二つの小さな正方形が pullback であるならば，外側の長方形もやはり pullback になっている．



証明）　右の図において点線の部分を除いたものが可換であるとする．

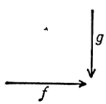



このとき右側の正方形が pullback であることを考えれば$\overset{1}{\dashrightarrow}$を加えて図が可換となるような$\overset{1}{\dashrightarrow}$が唯一通りに存在することがわかる．

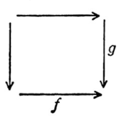
次に左側の正方形が pullback であることを考えれば更に$\overset{2}{\dashrightarrow}$を加えても図が可換となるような$\overset{2}{\dashrightarrow}$が唯一通りに存在することがわかる．

かくして長方形が pullback であることがわかった．

**定理 5**　圏 $\mathcal{C}$ においてどんな $A, B$ に対しても直積 $A\times B$ が存在し，どんな $\underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}}$ に対しても equaliser $\xrightarrow{e}\underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}}$ が存在するとすればどんな



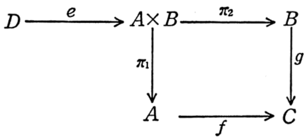

に対しても




となる pullback が存在する．

証明）　下図において $e$ を

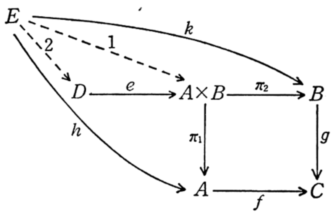
$$A\times B \underset{f\circ\pi_1}{\overset{g\circ\pi_2}{\rightrightarrows}} C$$




の equaliser であるとする．このとき次の図が pullback であることをいえばよい．

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi_2 \circ e} & B \\ {\scriptstyle \pi_1 \circ e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

このとき下の図が可換となるような $k, h$ をとって考える.




まず$\overset{1}{\dashrightarrow}$を付加えても図が可換となるような$\overset{1}{\dashrightarrow}$が $A \times B$ の性質から唯一通りに存在する.

次に$\overset{2}{\dashrightarrow}$を付加えても図が可換となるような$\overset{2}{\dashrightarrow}$が $e$ が equaliser であることから唯一通り存在する. したがって

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

が pullback であることがわかった.

## 2. 関　手

二つの圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ があたえられているとき, ‘$F$ が $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への関手 (functor) である’ ということを次のことによって定義して

$$\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{B}$$

とかく.

1)　$F$ は $\mathscr{A}$ の対象に $\mathscr{B}$ の対象を対応させる．

$A\in\mathscr{A}$ に対応する $\mathscr{B}$ の対象を $B$ とするとき

$$F(A)=B$$

とかく．$F(A)$ はしばしば $FA$ ともかく．

2)　$F$ は $\mathscr{A}$ の射に対して $\mathscr{B}$ の射を対応させる．

$f\in\mathscr{A}$ に対応する $\mathscr{B}$ の射が $g$ のとき

$$F(f)=g$$

とかく．この対応は次の条件をみたしている．

$$\begin{array}{c} A_1 \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ A_2 \end{array} \quad \text{ならば} \qquad \begin{array}{c} F(A_1) \\ \big\downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ F(A_2) \end{array} \quad \text{である}$$

したがって $F$ は $\mathscr{A}(A_1, A_2)$（$A_1$ から $A_2$ への射の集合）から $\mathscr{B}(F(A_1), F(A_2))$ の中への関数を定義する．この関数を同じ $F$ でかけば

$$F\colon\ \mathscr{A}(A_1, A_2)\longrightarrow\mathscr{B}(F(A_1), F(A_2))$$

となる．さらに $F$ は次の条件をみたしていなければならない．

$$F(A)=B\Longrightarrow F(\mathrm{id}_A)=\mathrm{id}_B,$$

$$F(f_1)=g_1,\ F(f_2)=g_2\Longrightarrow F(f_1\circ f_2)=g_1\circ g_2.$$

ここに $f_1\circ f_2$ が定義される場合だけを考えていることは勿論である．

次に圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への二つの関手 $F$ と $G$ とがあたえられているときに，$t$ が $F$ から $G$ への natural transformation であるということを

$$\mathscr{A}\ \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad F\quad} \\ \Big\Downarrow t \\ \xrightarrow[\quad G\quad]{} \end{array}\ \mathscr{B}$$

とかいて次の条件によって定義する．

すべての $\mathscr{A}$ の元 $A$ に対して $t$ は

$$F(A) \xrightarrow{t_A} G(A) \text{ なる } \mathscr{B} \text{ の射 } t_A$$

を次の性質がみたされているように対応させている.

$$\begin{array}{c} A \\ {\scriptstyle f}\downarrow \\ A' \end{array} \quad \text{ならば} \qquad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{t_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(A') & \xrightarrow[t_{A'}]{} & G(A') \end{array} \quad \text{が可換である}$$

以上の関手や natural transformation が自然な旨い定義であることはだんだん明らかになって行くことと思う.

いま $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ が圏とするとき, 次のように新しい圏 $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ をつくることができる.

1) $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ の対象 $F$ は $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{B}$ なる関手 $F$ であるとする.

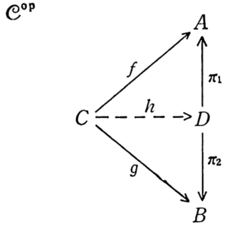
2) $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ の射 $t: F \longrightarrow G$ とは

$$\mathscr{A} \; \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad F \quad} \\ \Downarrow t \\ \xrightarrow[\quad G \quad]{} \end{array} \; \mathscr{B}$$

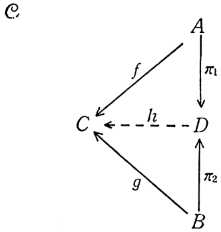
なる natural transformation $t$ のことであるとする.

この定義によって $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ が圏になっていることは容易に確められる.

さてここで $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ との関係について一言しよう. $\mathscr{C}$ と $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ とは射の矢印の向きが逆になっているだけだから勿論 $\mathscr{C}=(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ である. さていま, たとえば $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で $D=A\times B$ が存在して次の図が成立するとしよう.




なる $h$ が唯一通り存在する．この図を $\mathscr{C}$ で考えれば

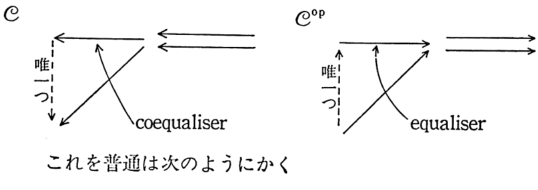



なる $h$ が唯一つ存在する，をいうことになる．

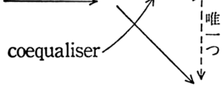
この性質をみたす $D$ が存在するとき，すなわち $\mathscr{C}^{op}$ で $A\times B$ になっているような $D$ が $\mathscr{C}$ で存在するときに $D$ を‘$A$ と $B$ との直和’といって

$$A \amalg B$$

で表わす．同じ方法で equaliser から coequaliser，また pullback から

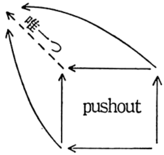



これを普通は次のようにかく

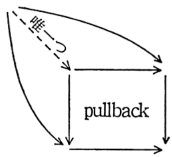


pushout が得られるが，ここでは図だけを示すことにする．

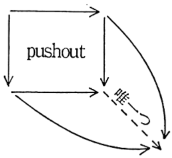
$\mathscr{C}$




$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$




これを普通は次のようにかく




逆に $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で直和になっているものは $\mathscr{C}$ では直積であり，$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ での coequaliser または pushout はそれぞれ $\mathscr{C}$ の equaliser および pullback であることは明らかであろう．

次に $A \xrightarrow{f} B$ が $\mathscr{C}$ の射であるとき，$f$ が $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で mono であるという条件を考えてみよう．これは

$$\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \qquad \mathrm{C} \overset{k}{\underset{h}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{f} A \quad \text{で} \quad f\circ k=f\circ h \ \text{ならば}\ k=h$$

という条件になっている．これを $\mathscr{C}$ で考えれば

$$\mathscr{C} \qquad A \xrightarrow{f} B \overset{k}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C \quad \text{で} \quad k\circ f=h\circ f \ \text{ならば}\ k=h$$

という条件になっている．$\mathscr{C}$ で上のような任意の $k, h$ に対してこの条件がみたされるとき，すなわち $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で $f$ が mono になっているとき，$f$ は $\mathscr{C}$ で epi（エピ）であるといって

$$f: A \twoheadrightarrow B \quad \text{または} \quad A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$$

によって表わす．

もちろん $f$ が $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で epi ならば，$f$ は $\mathscr{C}$ で mono である．

$f: A \longrightarrow B$ が epi ということは $\mathscr{C}$ が Sets, Gr, Ab などのときは $f$ が $B$ の上への写像ということになっている．これは明らかであろう．

### 3. limit と colimit

$\mathcal{C}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ の対象と射の集合 $\mathcal{D}$ が次の条件を満足するとき，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{C}$ の部分圏という．

1) $f \in \mathcal{D}$ で $f: A \longrightarrow B$ ならば $A, B \in \mathcal{D}$.

2) $A \in \mathcal{D}$ ならば $\mathrm{id}_A \in \mathcal{D}$.

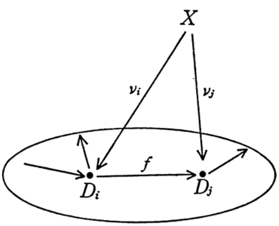
3) $f, g \in \mathcal{D}$ で $f \circ g$ が $\mathcal{C}$ で定義できれば，

$$f \circ g \in \mathcal{D}.$$

$\mathcal{D}$ が部分圏であるとき，$\mathcal{D}$ の元だけを考えれば，また圏になっていることは明らかであろう．別な言葉でいえば $\mathcal{C}$ の部分集合が再び（もとの演算 dom, cod, $\circ$ について）圏になっているとき部分圏というのである．

いま $\mathcal{C}$ が圏で $\mathcal{D}$ がその部分圏であるとする．この $\mathcal{D}$ に対して次の条件をみたす $\mathcal{C}$ の対象 $X$ が存在するとき，$X$ を $\mathcal{D}$ の limit といって次の記号で表わす．

$$X = \varprojlim \mathcal{D}$$




1) $X$ から $\mathcal{D}$ のすべての対象 $D_i$ への射 $\nu_i$ があって右の図は可換である．

すなわち $f \in \mathcal{D}$ で $f: D_i \longrightarrow D_j$ ならば

$$\nu_j = f \circ \nu_i.$$

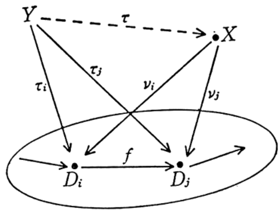
2) 任意の $\mathcal{C}$ の対象 $Y$ と，$Y$ から $\mathcal{D}$ の任意の対象 $D_i$ への射 $\tau_i$ があって，すべての $f \in \mathcal{D}, f: D_i \longrightarrow D_j$ について

$$\tau_j = f \circ \tau_i$$

がみたされているならば，$\tau: Y \longrightarrow X$ なる $\tau$ で，すべての $D_i \in \mathcal{D}$ について

$$\tau_i=\nu_i\circ\tau$$

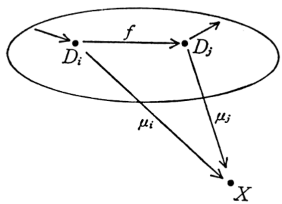
になるような $\tau$ が唯一通り存在する．




この $\varprojlim \mathscr{D}$ の説明はもう少しあとですることにしてこの limit と対になっている colimit の概念をまず定義することにする．大まかにいえば $X$ が $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で $\varprojlim \mathscr{D}$ になっているとき，$X$ が $\mathscr{C}$ で $\mathscr{D}$ の colimit になっているといって $X=\varinjlim \mathscr{D}$ とかくのである．もっとキチンとした定義をかけば次のようになる．

前と同じく $\mathscr{C}$ が圏で $\mathscr{D}$ はその部分圏とする．この $\mathscr{D}$ に対して次の条件をみたす $\mathscr{C}$ の対象 $X$ が存在するとき，$X$ を $\mathscr{D}$ の colimit といって次の記号で表わす．

$$X=\varinjlim \mathscr{D}$$

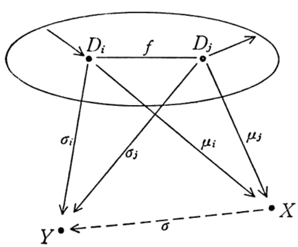



1) $\mathscr{D}$ のすべての対象 $D_i$ から $X$ への射 $\mu_i$ があって右の図が可換である．すなわち $f\in\mathscr{D}$ で $f:D_i\longrightarrow D_j$ ならば

$$\mu_i=\mu_j\circ f.$$

2) 任意の $\mathscr{C}$ の対象 $Y$ と，$\mathscr{D}$ のすべての元 $D_i$ から $Y$ への射 $\sigma_i$ があって，すべての $f\in\mathscr{D}$ なる $f: D_i\longrightarrow D_j$ について

$$\sigma_i=\sigma_j\circ f$$




がみたされているならば

$$\sigma:\ X\longrightarrow Y$$

なる $\sigma$ ですべての $D_i\in\mathscr{D}$ について

$$\sigma_i=\sigma\circ\mu_i$$

が成立するような $\sigma$ が唯一通り存在する．

もちろん $\varprojlim \mathcal{D}$ や $\varinjlim \mathcal{D}$ はいつでも存在するとは限らない．こういうものが存在するときに limit または colimit というだけのことである．limit や colimit は唯一通りには定まらないが limit が二つあれば互いに同等になるから唯一通りに定まるように思っても殆んど構わない．colimit についても同様である．

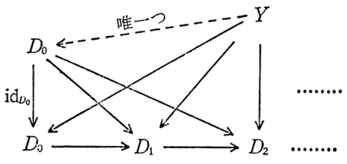
説明の手段として色々の例を考えることとする．

1） $\mathcal{D}$ の対象が $D_0, D_1, D_2, \cdots,\ f_{ij}\colon D_i \longrightarrow D_j\ (i \leq j)$ のとき．

このときは簡単に $\mathcal{D}$ を次のようにかいてもよいだろう．

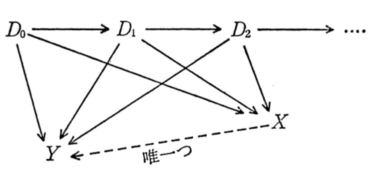
$$D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3 \longrightarrow \cdots$$

このときは $D_0 = \varprojlim \mathcal{D}$ となることは次の図から容易にわかるであろう．




したがってこの場合には余り意味がない．

次に同じ $\mathcal{D}$ に対して $X = \varinjlim \mathcal{D}$ とすれば



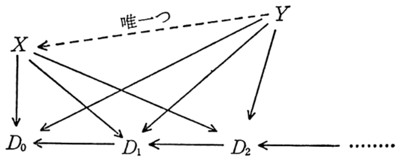

図において $X$ が丁度 $D_0, D_1, \cdots$ の limit になっている感じがよくわかることと思う．実際に Sets, Gr, Ab の圏では $\varinjlim \mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ の元の帰納的極限 (inductive limit) になっている．

2） $\mathcal{D}$ の対象が $D_0, D_1, D_2, \cdots,\ f_{ij}\colon D_i \longrightarrow D_j\ (j \leq i)$ のとき．

このときは $\mathcal{D}$ を簡単に次のようにかいてよいだろう．

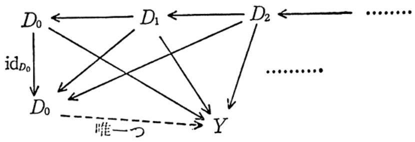
$$D_0 \longleftarrow D_1 \longleftarrow D_2 \longleftarrow D_3 \longleftarrow \cdots\cdots$$

このとき $X=\varprojlim \mathscr{D}$ とすれば，大体次の図から $X$ が $D_0, D_1, \cdots$ の極限になっている感じがわかるであろう．




事実 $\mathscr{C}$ が Sets, Gr, Ab の圏では，この極限は $D_0, D_1, \cdots$ の射影的極限 (inverse limit または projective limit) となっている．

次に同じ $\mathscr{D}$ で $\varinjlim \mathscr{D}$ を考えてみれば $D_0=\varinjlim \mathscr{D}$ になることは次の図をみれば明らかであろう．



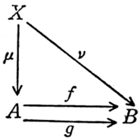

したがって $\varprojlim \mathscr{D}$ は $D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \cdots$ ではトリビアルになるが，$D_0 \longleftarrow D_1 \longleftarrow \cdots$ では普通の極限になる極限のことであり，$\varinjlim \mathscr{D}$ は $D_0 \longleftarrow D_1 \longleftarrow \cdots$ ではトリビアルになるが，$D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \cdots$ では普通の極限になる極限のことだと思えばよい．

もちろん $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で limit になるものは $\mathscr{C}$ で colimit になり，$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で colimit になっているものは $\mathscr{C}$ で limit になっている．

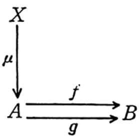
3) $\mathscr{D}$ が $A, B,$ $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ なる $f, g$ と $\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B$ からできているとき．

このときは簡単に $\mathscr{D}$ を $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ とかいてよいだろう．

まず

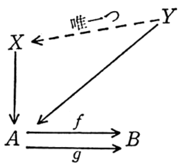



が可換であることを考えるとこれは $\nu=f\circ\mu=g\circ\mu$ であるから，これは



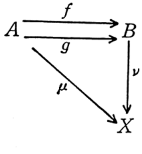

で $f\circ\mu=g\circ\mu$ なる図を考えたのと実質的に同じことになる．

したがって $X=\varprojlim \mathscr{D}$ とすれば，これは次の図の示す所である（図の細かい説明はいつもの通り省略してあるが自分で補なってほしい）．




これはとりも直さず $X$ が $A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$ の equaliser だということになっている．

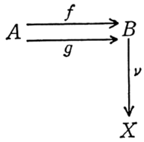
次に同じ $\mathscr{D}$ について $X=\varinjlim \mathscr{D}$ を考えることにする．まず前と同じく




が可換であるということは下の図のような $\nu$ だけのものを考えて

$$\nu \circ f = \nu \circ g$$

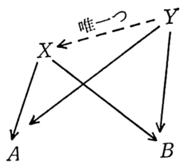
が成立していると考えることと同じことになっている．このことから前と同




じように $X = \varinjlim \mathscr{D}$ は $X$ が $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ の coequaliser になっているということが容易にわかる．

4) $\mathscr{D}$ が $A, B, \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B$ だけからできているとき．

まず $X = \varprojlim \mathscr{D}$ とすれば，これは図では




のようになっている．この図をよく見れば，これは $X = A \times B$ の定義であることがわかるであろう．すなわちこの場合 $\varprojlim \mathscr{D} = A \times B$ が成立する．同様にして $\varinjlim \mathscr{D} = A \amalg B$ になっていることを確めてほしい．

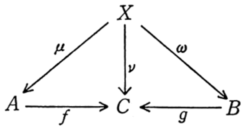
5) $\mathscr{D}$ が $A, B, C,\ f: A \longrightarrow C,\ g: B \longrightarrow C,\ \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_C$ からできているとき．

このときは $\mathscr{D}$ を

$$A \xrightarrow[f]{} C \xleftarrow[g]{} B$$

とかいてよいだろう．

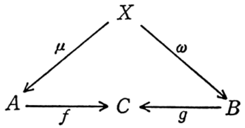
まず $X = \varprojlim \mathscr{D}$ を考えるため




が可換だという条件を考えてみるとこれは

$$\nu = f \circ \mu = g \circ \omega$$

という条件であるから，実は

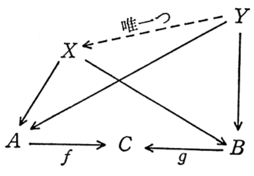



なる図を考えていて

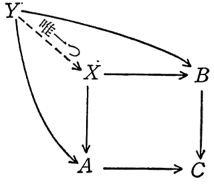
$$f \circ \mu = g \circ \omega$$

が成立しているものだとしてよい.

こう考え直すと $X = \varprojlim \mathscr{D}$ の意味は次の図で表わされる.




この図を見なおして




とかき直せばこれは

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

が pullback であるということであることが直ちにわかる．すなわち $\varprojlim \mathscr{D}$ は pullback を意味している．

次にこの $\mathscr{D}$ で $\varinjlim \mathscr{D}$ を考えれば，$C=\varinjlim \mathscr{D}$ であることが容易にわかるから，この場合に $\varinjlim \mathscr{D}$ はトリビアルな概念になってしまう．

6) $\mathscr{D}$ が $A, B, C,\ f: C \longrightarrow A, g: C \longrightarrow B,\ \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_C$ からできているとき．

このとき $\mathscr{D}$ は $A \underset{f}{\longleftarrow} C \underset{g}{\longrightarrow} B$ とかいてよいだろう．このとき前と同じように考えれば $\varinjlim \mathscr{D}=X$ は

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

なる pushout を作ることであり，$\varprojlim \mathscr{D}=C$ となってトリビアルになることが直ちにわかるであろう．

**定義** 圏 $\mathscr{C}$ の元 $X$ が始対象 (initial) であるということは，どんな $\mathscr{C}$ の元 $C$ をとっても $X \longrightarrow C$ なる射が唯一つ存在することをいう．

Sets の始対象は $\phi$ だけであり，Gr, Ab の始対象は単位元だけからできている群になっている．

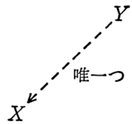
**定義** 圏 $\mathscr{C}$ の元 $X$ が終対象 (terminal) であるというのは $\mathscr{C}$ のすべての対象 $C$ に対して $C \longrightarrow X$ なる射が唯一つ存在することをいう．

Sets における終対象は唯一個の元をもつ任意の集合であり，Gr, Ab における終対象は始対象と同じで単位元だけからなる群である．

7) $\mathscr{D}=\phi$ のとき，すなわち $\mathscr{D}$ が空な圏のとき．

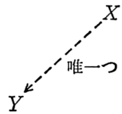
$X=\varprojlim \mathscr{D}$ はとりも直さず，任意の $\mathscr{C}$ の対象 $Y$ に対して次の図が成立

しているということである.




すなわち $X$ が終対象であるということである.

また $X=\varinjlim \mathscr{D}$ はとりも直さず, 任意の $\mathscr{C}$ の対象 $Y$ に対して次の図が成立しているということである.




すなわち $X$ は $\mathscr{C}$ の始対象であるということである.

終対象の一つをとってきて $1$ と表わすのが慣用である. とり方は一通りに定まらないが, どれをとっても同等になるので圏の理論としては同じことになる.

簡単な性質として $f: 1 \longrightarrow A$ なる $f$ はいつでも mono である. これは $X \longrightarrow 1$ なる射が唯一つしかないから明らかであろう.

$\mathscr{D}$ が有限個の対象と有限個の射しかもっていない部分圏であるときに, $\varprojlim \mathscr{D}$ のことを finite limit といい, $\varinjlim \mathscr{D}$ を finite colimit という.

もし圏 $\mathscr{C}$ が終対象と直積 $A \times B$ と equaliser とをいつでももっていれば, どんな有限の $\mathscr{D}$ に対しても finite limit が必ず存在する. また逆に $\mathscr{C}$ が始対象と $A \amalg B$ と coequaliser をもっているときには, どんな有限の $\mathscr{D}$ に対しても finite colimit が必ず存在する. この証明は別に難しくはないがここでは省略する.

最後に limit と colimit の表を入れておこう.

| limit | colimit |
|---|---|
| $\varprojlim$ | $\varinjlim$ |
| 射影的極限 | 帰納的極限 |
| $A\times B$ | $A\amalg B$ |
| equaliser | coequaliser |
| pullback | pushout |
| 終 対 象 | 始 対 象 |

## 4. 米田のレンマ

本節の内容は米田信夫氏によるもので米田のレンマとして圏の理論で愛用されているレンマである.

いま $\mathcal{C}$ を圏として $\mathcal{C}$ の対象 $A, B$ をとると $\mathcal{C}(A, B)$ は射の集合であるから $\mathcal{C}(A, B)$ は Sets の対象となっている. $A$ は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の対象であるから, $(A, B)$ は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}$ なる圏の対象でもある. (圏の直積については §1 を参照されたい.) したがって

$$\mathcal{C}(-,-): \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

なる写像が考えられるが, いまこれが関手になっていることをいおう. 以下 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ と $\mathcal{C}$ とが出てくるときには我々は

$$\begin{array}{c} C_1 \\ \downarrow f \\ C_2 \end{array} \quad \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \text{ のかわりに } \quad \begin{array}{c} C_1 \\ \uparrow f \\ C_2 \end{array} \quad \mathcal{C}$$

と $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ での表現ではなくて $\mathcal{C}$ での表現を用いることにする. これはただ $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ にしたり $\mathcal{C}$ にしたりいちいち区別してかく代りに黙っていれば全部 $\mathcal{C}$ のことと約束して手間を省くだけのことである.

上の $\mathcal{C}(-,-)$ が関手であることをいうためには, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}$ の射 $(f, g)$ を

とって

$$\begin{array}{c} C_1 \\ \uparrow f \\ C_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} C \\ \downarrow g \\ C' \end{array} \quad \text{のとき} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{C}(C_1, C) \\ \downarrow \\ \mathcal{C}(C_2, C') \end{array}$$

なる関数を定義すればよい．このため $\mathcal{C}(C_1, C)$ の元を $h$ とすれば $h\colon C_1 \longrightarrow C$ なる射であるから求める $\mathcal{C}(C_2, C')$ の元を次の図で示される射の結合

$$g \circ h \circ f$$

によって定義する．

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\ h\ } & C \\ f\uparrow & & \downarrow g \\ C_2 & & C' \end{array}$$

すなわち $h \longmapsto g \circ h \circ f$ なる対応による関数を考えるのである．この定義によって

$$\mathcal{C}(-,-)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

が関手になっていることは見易いであろう．

いま $\mathcal{C}$ の対象 $C$ を一つ固定する．そして $Y_{\mathcal{C}}(C)$ を

$$Y_{\mathcal{C}}(C) = \mathcal{C}(-, C)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

なる関手として定義する．この $Y_{\mathcal{C}}(C)$ が関手になっていることは上の説明から明らかであろうが念のために図をかくと次のようになる．

$$\begin{array}{c} C_1 \\ \uparrow f \\ C_2 \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{c} \mathcal{C}(C_1, C) \\ \downarrow \mathcal{C}(f, C) \\ \mathcal{C}(C_2, C) \end{array} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\ g\ } & C \\ & \downarrow \mathcal{C}(f, C)\ \text{は}\ g\ \text{に}\ g\circ f\ \text{を対応させる} & \\ C_2 & \xrightarrow[\ g\circ f\ ]{} & C \end{array}$$

これをもう一ついいかえると

$$Y_{\mathscr{C}}:\ \mathscr{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$$

という関手が定義できたことになっている．これを図でかけば $Y_{\mathscr{C}}$ は

$$\begin{array}{ccccc} C & & & \xrightarrow{\mathscr{C}(-,C)} & \\ \Big\downarrow g & \longmapsto & \mathscr{C}^{\mathrm{op}} & \Big\Downarrow \mathscr{C}(-,g) & \mathrm{Sets} \\ C' & & & \xrightarrow[\mathscr{C}(-,C')]{} & \end{array}$$

という形で $g \in \mathscr{C}(C, C')$ に対して $\mathscr{C}(-, g)$ という $\mathscr{C}(-, C)$ と $\mathscr{C}(-, C')$ という二つの関手の間の natural transformation を対応させる射になっている．原則的には $\mathscr{C}(-, g)$ をキチンと定義してそれが natural transformation であることや $Y_{\mathscr{C}}$ が関手であることなどを証明すべきであるが，万事常識通りで証明というよりは当り前なことばかりなのでここでは省略する．

全く同様な手続で

$$Y^{\mathscr{C}}:\ \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Sets}^{\mathscr{C}}$$

が定義できるがその定義は自明と思われるのでここでは省略する．

さて $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ が二つの圏で $F, G$ が

$$\mathscr{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathscr{B}$$

なる $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への二つの関手であるとする．そのとき $F$ から $G$ への natural transformation の全体を $\mathrm{Nat}(F, G)$ と表わすことにする．

本節全体の内容が米田のレンマと通称されるが，その中で次の定理の形がしばしば用いられる．

**定理 6** (米田のレンマ)

1) $F:\ \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ を関手とするとき

$$\mathrm{Sets}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(Y_{\mathscr{C}}(C), F) \simeq F(C)$$

である．$Y_{\mathscr{C}}(C)$ を $\mathscr{C}(-, C)$ とかけば

$$\mathrm{Nat}(\mathscr{C}(-,C),F)\simeq F(C)$$

とかいても同じことである．

2)　$F:\mathscr{C}\longrightarrow \mathrm{Sets}$ を関手とするとき

$$\mathrm{Sets}^{\mathscr{C}}(Y^{\mathscr{C}}(C),F)\simeq F(C).$$

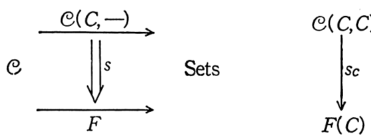
これはまた次のようにかいてもよい．

$$\mathrm{Nat}(\mathscr{C}(C,-),F)\simeq F(C).$$

証明）　1）も 2）も同じことであるから 2）の形で証明する．実際には

$$\Phi:\ \mathrm{Nat}(\mathscr{C}(C,-),F)\longrightarrow F(C)$$

なる $\Phi$ を上手に定義して $\Phi$ が一対一で $F(C)$ の上への写像であることをいえばよい．このため，$s\in \mathrm{Nat}(\mathscr{C}(C,-),F)$ なる $s$ を一つとってくる．




$s$ は natural transformation であるから $s_C$ が定義されていて

$$s_C:\ \mathscr{C}(C,C)\longrightarrow F(C)$$

なる関数になっている．$\mathrm{id}_C\in\mathscr{C}(C,C)$ であるから

$$\Phi(s)=s_C(\mathrm{id}_C)$$

によって我々は $\Phi$ を定義する．

1)　$\Phi$ は一対一の対応である．

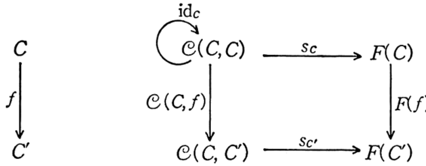
$$\mathscr{C}(C,-)\ \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}}\ F$$

$s$ と $t$ とが $\mathscr{C}(C,-)$ から $F$ への二つの natural transformation として

$$s_C(\mathrm{id}_C)=t_C(\mathrm{id}_C)\Longrightarrow s=t$$

を証明すればよい．

このため $f:C\longrightarrow C'$ なる射をとれば




$s$ が natural transformation であることから上の図は可換となる．ゆえに

$$s_{C'}(f) = s_{C'} \circ \mathcal{C}(C, f) \circ \mathrm{id}_C$$
$$= F(f) \circ s_C \circ \mathrm{id}_C \qquad (\text{図の可換})$$
$$= F(f) \circ t_C \circ \mathrm{id}_C \qquad (s_C(\mathrm{id}_C) = t_C(\mathrm{id}_C))$$
$$= t_{C'}(f).$$

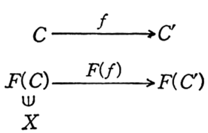
$f, C'$ は任意にとったのだから $s=t$ が証明された．($C=C'$ は一つの特別な場合になる．)

2) $\Phi$ が $F(C)$ の上への写像であること．

$X \in F(C)$ なる $X$ を任意にとってくる．

$s: \mathcal{C}(C, —) \longrightarrow F$ なる natural transformation で $X = s_C(\mathrm{id}_C)$ なる $s$ をみつければよい．

$s$ を定義するということは，任意の $f: C \longrightarrow C'$ なる射に対して $s_{C'}(f)$ を定義すればよい．いま




であるから $F(f)(X) \in F(C')$ である．我々は

$$s_{C'}(f) = F(f)(X)$$

と定義する．明らかに，$s_{C'}: \mathcal{C}(C, C') \longrightarrow F(C')$ なる関数になっている．

$s$ が $\mathcal{C}(C, —)$ から $F$ への natural transformation になっていることを見るためには次の図が可換なことをいえばよい．

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & & \mathcal{C}(C, C_1) & \xrightarrow{s_{C_1}} & F(C_1) \\ \downarrow g & & \downarrow \mathcal{C}(C,g) & & \downarrow F(g) \\ C_2 & & \mathcal{C}(C, C_2) & \xrightarrow{s_{C_2}} & F(C_2) \end{array}$$

このために $f \in \mathcal{C}(C, C_1)$ なる $f$ をとれば

$$F(g)(s_{C_1}(f)) = F(g)(F(f)(X)) = F(g \circ f)(X),$$

$$s_{C_2}(\mathcal{C}(C, g)(f)) = s_{C_2}(g \circ f) = F(g \circ f)(X)$$

となるからよい．さて最後に

$$\begin{aligned} s_C(\mathrm{id}_C) &= F(\mathrm{id}_C)(X) \\ &= \mathrm{id}_{F(C)}(X) \\ &= X \end{aligned}$$

となるから証明が終った．

以上の証明によって同時に

$$\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y_{\mathcal{C}}(\ \ ), F) \simeq F$$

なる同形対応が natural transformation になっていることがわかる．

この定理の $F$ を $\mathcal{C}(-, C')$ か $\mathcal{C}(C', -)$ かにとることによって次の系が直ちに得られる．

**系**　1)　$\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{C}(-, C), \mathcal{C}(-, C')) \simeq \mathcal{C}(C, C')$.

2)　$\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(C, -), \mathcal{C}(C', -)) \simeq \mathcal{C}(C', C)$.

**定義**　$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ が関手であるとき，$F$ が $\mathcal{C}(C, -)$ と同形になっているとき（もっと詳しくいえばこの同形対応が natural transformation になっているとき），$F$ を表現可能であるといい，$C$ が $F$ を表現するという．

**定理 7**　関手 $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ が表現可能とするとき，$F$ を表現する $\mathcal{C}$ の対象 $C$ は二つあれば互いに同等という意味で一意的に定まる．

証明）$\mathcal{C}(C', -)$ と $\mathcal{C}(C, -)$ とがともに $F$ を表現するとすれば

$$\mathcal{C}\quad \begin{array}{c}\xrightarrow{\mathcal{C}(C,-)}\\ s\Big\Downarrow\quad\Big\Uparrow t\\ \xrightarrow[\mathcal{C}(C',-)]{}\end{array}\quad \mathrm{Sets}$$

なる natural transformation $s$ と $t$ で互いに逆になっているものがある.

これを米田のレンマ（実際には証明の構成まで含める）

$$\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(C,-),\mathcal{C}(C',-))\simeq\mathcal{C}(C',C)$$

を用いて書き直せば

$$C\underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}}C',\quad gf=\mathrm{id}_C, fg=\mathrm{id}_{C'}$$

なる $f, g$ が存在することがわかる.

このように一般に米田のレンマといっても定理の形だけではなくて証明の構成まで考えた形で用いるのが普通である.

**定義** 関手 $F\colon \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ が full であるということを，任意の $\mathcal{A}$ の対象 $A, A'$ に対して $F$ は $\mathcal{A}(A, A')\longrightarrow\mathcal{B}(FA, FA')$ なる関数になっているが，この関数が $\mathcal{B}(FA, FA')$ の上への関数であることをいう．別の言葉でいえば

$$\text{任意の}\ \begin{array}{c}FA\\ {\scriptstyle g}\big\downarrow\\ FA'\end{array}\ \text{に対して}\ \begin{array}{c}A\\ {\scriptstyle f}\big\downarrow\\ A'\end{array}\ \text{があって}\ F(f)=g\ \text{となること}$$

だといってよい.

また同じく関手 $F\colon \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ が faithful だということを $\mathcal{A}$ の任意の対象 $A, A'$ について

$$\begin{array}{c}A\\ {\scriptstyle f_1}\big\downarrow\big\downarrow{\scriptstyle f_2}\\ A'\end{array},\quad \begin{array}{c}FA\\ {\scriptstyle Ff_1}\big\downarrow\big\downarrow{\scriptstyle Ff_2}\\ FA'\end{array},\quad Ff_1=Ff_2\Longrightarrow f_1=f_2$$

が成立していることとする．すなわち

$$F\quad \mathscr{A}(A, A') \longrightarrow \mathscr{B}(FA, FA')$$

が一対一の対応になっていることである.

米田のレンマを眺めてみると $Y_\sigma$ および $Y^\sigma$ が full で faithful な関手になっていることがわかる.

## 5. 随伴関手

前節と同じように圏 $\mathscr{A}$ のなかで $f\colon A_1' \longrightarrow A_1$, $g\colon A_2 \longrightarrow A_2'$ のときに, この $f$ と $g$ とによって定まる, $\mathscr{A}(A_1, A_2) \longrightarrow \mathscr{A}(A_1', A_2')$ なる写像を図のように $h \longmapsto g \circ h \circ f$ なる対応によって定義する.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & & A_2 \\ \uparrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A_1' & & A_2' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{h} & A_2 \\ \uparrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A_1' & & A_2' \end{array}$$

いま, $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ は圏で $F, U$ は下の図のような関手であるとする.

$$\mathscr{A} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathscr{B}$$

このとき '$F$ が $U$ の左随伴関手である' ということを, すべての $\mathscr{A}$ の対象 $A$ と $\mathscr{B}$ の対象 $B$ に対して次のような自然な同形対応が存在することと定義する.

$$\mathscr{A}(FB, A) \simeq \mathscr{B}(B, UA)$$

ここで '自然な' 同形対応という意味を正確に定義するためにこの対応を

$$O_{A,B}\colon \mathscr{A}(FB, A) \longrightarrow \mathscr{B}(B, UA)$$

と書くことにすれば, $O$ が自然であるとは次の図が可換になることである.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & & B_1 \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ A_2 & & B_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{A}(FB_1, A_1) & \xrightarrow{O_{A_1,B_1}} & \mathscr{B}(B_1, UA_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{A}(FB_2, A_2) & \xrightarrow{O_{A_2,B_2}} & \mathscr{B}(B_2, UA_2) \end{array}$$

ここで図の $\mathscr{A}(FB_1, A_1) \longrightarrow \mathscr{A}(FB_2, A_2)$ なる写像は本節の初めにのべた $Fg, f$ によってできる写像であり，また $\mathscr{B}(B_1, UA_1) \longrightarrow \mathscr{B}(B_2, UA_2)$ は同じく本節の初めにのべた $g, Uf$ によってできる写像である．

$F$ が $U$ の左随伴関手であるときに '$U$ は $F$ の右随伴関手である' という．

$F$ が $U$ の左随伴関手であることを記号で

$$F \dashv U$$

と表わす．したがってこれは $U$ が $F$ の右随伴関手であることを表わす記号であると思ってもよい．

随伴関手の一番よい例は第1章の

$$\mathrm{Top}(X) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\leftrightarrows}} \mathrm{Top}(Y)$$

である．すなわち $X, Y$ を位相空間で $f\colon X \longrightarrow Y$ を連続とするとき第1章で $f^* \dashv f_*$ であることが証明された．

もう一つ代表的な例として

$$\mathrm{Gr} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathrm{Sets}$$

で $F(X)$ を集合 $X$ から生成された自由群として，$UG$ で群 $G$ に対して（$G$ の群演算を忘れて）$G$ を集合だけとみた集合（$G$ の underlying set）を対応させる写像とすれば，$F \dashv U$ になっていることは

$$\mathrm{Gr}(FX, G) \simeq \mathrm{Sets}(X, UG)$$

という自然な同形対応があるということだから，自由群の常識から明らかであろう．

さて $\mathscr{A} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathscr{B}$ なる状況，すなわち

$$\mathscr{A}(FB, A) \simeq \mathscr{B}(B, UA)$$

なる状況を考えよう．これはしばしば次のようにかかれる．

$$\frac{FB \longrightarrow A}{B \longrightarrow UA}$$

この意味は —— の上のような射と —— の下のような射との間に自然な同形対応があるという意味である．このような例を二つあげておくからその意味を考えられたい．

$$\frac{FB' \xrightarrow{Fg} FB \longrightarrow A}{B' \xrightarrow{g} B \longrightarrow UA} \qquad \frac{FB \longrightarrow A \xrightarrow{f} A'}{B \longrightarrow UA \xrightarrow[Uf]{} UA'}$$

このような省略記号はほかにも色々用いられる．次のものもよく用いられる．いま図の状況を考えよう（説明はしない．自分で考えてみてほしい）．

$$\mathscr{W} \xrightarrow{Q} \mathscr{X} \ \underset{N}{\overset{M}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\Downarrow s}}}}\ \mathscr{Y} \xrightarrow{P} \mathscr{Z}$$

このとき次の図は可換となる．

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ X' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} MX & \xrightarrow{s_X} & NX \\ {\scriptstyle Mf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Nf} \\ MX' & \xrightarrow{s_{X'}} & NX' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} PMX & \xrightarrow{Ps_X} & PNX \\ {\scriptstyle PMf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle PNf} \\ PMX' & \xrightarrow{Ps_{X'}} & PNX' \end{array}$$

これから自然に $PM, Ps, PN$ が定義されて

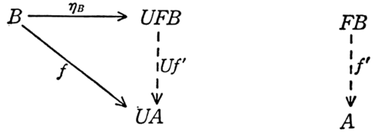
$$\mathscr{X} \ \underset{PN}{\overset{PM}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\Downarrow Ps}}}}\ \mathscr{Z} \quad \text{同様に} \quad \mathscr{W} \ \underset{NQ}{\overset{MQ}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\Downarrow sQ}}}}\ \mathscr{Y}$$

とかいてよいことがわかる．意味は自明と思うが念の為にユックリ考えてみてほしい．以後時々こんな記号も用いることにする．

**定理 8**　いま $U\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ を関手とする．このとき次の四つの条件は互いに同等である．

1) $F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ なる関手で $F \dashv U$ なるものが存在する.

2) $\mathcal{B}$ の任意の対象 $B$ に対して, $\mathcal{A}$ の対象 $FB$ と $\eta_B: B \longrightarrow UFB$ なる射で次の条件をみたすものが存在する.



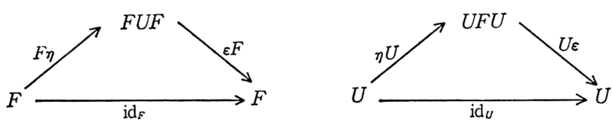

任意の $f: B \longrightarrow UA$ に対して図が可換となるような $f': FB \longrightarrow A$ が唯一通り存在する.

3) 任意の $\mathcal{B}$ の対象 $B$ に対して

$$\mathcal{B}(B, U(-)): \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

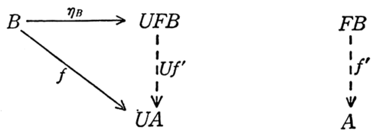
が表現可能である.

4) $F: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ なる関手 $F$ と $\eta: I_{\mathcal{B}} \longrightarrow UF$ と $\varepsilon: FU \longrightarrow I_{\mathcal{A}}$ なる natural transformation で次の図が可換となるものが存在する.




ここに $I_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{B}}$ はそれぞれ $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の上の恒等写像であり, $\mathrm{id}_F$ と $\mathrm{id}_U$ はそれぞれ $F, U$ を $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ および $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ の対象と考えたときの id である.

証明) 1) $\Longrightarrow$ 2)




なる $f'$ が唯一通り存在することをいえばよい. 次の式から判断されたし.

$$\frac{\dfrac{B \xrightarrow{\ f\ } UA}{FB \xrightarrow{\mathrm{id}_{FB}} FB \xrightarrow{\ f'\ } A}}{B \xrightarrow{\ \eta_B\ } UFB \xrightarrow{\ Uf'\ } UA}$$

2) $\Longrightarrow$ 1) $F$ を関手にするために $f: B \longrightarrow B'$ に対して $F(f): FB \longrightarrow FB'$ を定義しなければならない．このため次の図を考える．

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\ \eta_B\ } & UFB \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ug} \\ B' & \xrightarrow{\ \eta_{B'}\ } & UFB' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} FB \\ \downarrow{\scriptstyle g} \\ FB' \end{array}$$

2) の性質から $\overset{Ug}{\dashrightarrow}$ を加えたとき図が可換になるような $g: FB \longrightarrow FB'$ が唯一通り存在する．この $g$ を用いて

$$Ff = g$$

と定義すれば，$F$ が関手になり，また 2) の性質から次の式は明らかである．

$$\mathcal{A}(FB, A) \simeq \mathcal{B}(B, UA).$$

あとこの同形対応が自然な対応であることを証明しなければならないがそれは演習問題として残したい．

1) $\Longleftrightarrow$ 3)　1) $\Longrightarrow$ 3) は明らかであるから 3) $\Longrightarrow$ 1) だけを証明すればよい．

$$\mathcal{B}(B, U(-)): \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

が表現可能であれば，次の性質をみたす $FB$ が存在する．

$$\mathcal{B}(B, U(-)) \simeq \mathcal{A}(FB, -).$$

この $F$ を求める $F$ と定義すれば明らかに

$$\mathcal{A}(FB, A) \simeq \mathcal{B}(B, UB)$$

の性質が成立する．これが自然な同形であることも明らか．

1) $\Longrightarrow$ 4)

1) があたえられたとき $\mathcal{A}(FB, A)$ と $\mathcal{B}(B, UA)$ との間の

$$\mathscr{A}(FB, A) \underset{\Phi'}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}(B, UA)$$

のような自然な同形対応を $\Phi, \Phi'$ で表わすことにする.

この対応から

$$\mathscr{B}(UA, UA) \simeq \mathscr{A}(FUA, A)$$

なる自然な同形対応が定義される. 左の $\mathscr{B}(UA, UA)$ の元 $\mathrm{id}_{UA}$ に対応する右の $\mathscr{A}(FUA, A)$ の元を

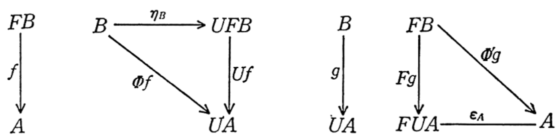
$$\varepsilon_A : FUA \longrightarrow A$$

として $\varepsilon_A$ を定義する. 同様にして

$$\eta_B : B \longrightarrow UFB$$

を定義することができる.

4) $\Longrightarrow$ 1) 逆に $\varepsilon, \eta$ があたえられたとき上にのべた性質をもつ $\Phi, \Phi'$ を次の図のように定義する.




これらの定義が求める性質をみたすことは演習問題として残しておきたい.

さて前に $\mathscr{C}$ の部分圏 $\mathscr{D}$ に対して $\varprojlim \mathscr{D}$ および $\varinjlim \mathscr{D}$ を定義したが, ここでこの定義を形式的にちょっとばかり広げておこう. 以下に $\mathscr{D}$ は任意の圏として必ずしも $\mathscr{C}$ の部分圏ではないとする. すなわち一般には $\mathscr{D}$ は $\mathscr{C}$ の外にあるものとして,

$$\mathscr{D} \xrightarrow{D} \mathscr{C}$$

を $\mathscr{D}$ から $\mathscr{C}$ への関手とする. このとき $\mathscr{D}'$ を $\mathscr{D}$ の $D$ による像とすれば $\mathscr{D}'$ は明らかに $\mathscr{C}$ の部分圏となっている. いま我々は $\varprojlim_{\mathscr{D}} D$ および $\varinjlim_{\mathscr{D}} D$ を次の式によって定義する.

$$\varprojlim_{\mathscr{D}} D = \varprojlim \mathscr{D}', \qquad \varinjlim_{\mathscr{D}} D = \varinjlim \mathscr{D}'.$$

いま更に

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\varDelta} \mathscr{C}^{\mathscr{D}}$$

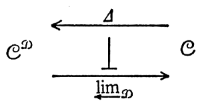
なる関手 $\varDelta$ を定義するために，任意の $\mathscr{C}$ の対象 $X$ に対して $\varDelta X: \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ なる関手を

$\varDelta X$ はすべての $\mathscr{D}$ の対象 $D$ に $X$ を対応させ，

すべての $\mathscr{D}$ の射 $f$ に $\mathrm{id}_X$ を対応させる

によって定義する．この定義から上の関手 $\varDelta: \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathscr{D}}$ が唯一通りに定まる．

**定理 9** $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ を二つの圏とし，すべての $\mathscr{D}$ から $\mathscr{C}$ への関手 $D: \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ に対して $\varprojlim_{\mathscr{D}} D$ が $\mathscr{C}$ に存在するとき，$\varDelta \dashv \varprojlim_{\mathscr{D}}$ すなわち $\varprojlim_{\mathscr{D}}$ は $\varDelta$ の右随伴関手である．状況を図でかけば次の如くである．




証明） 図をかいてあとは想像してもらうことにする．

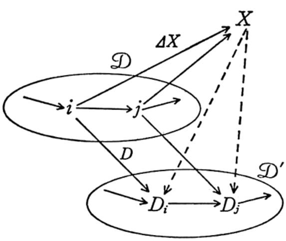



図 1

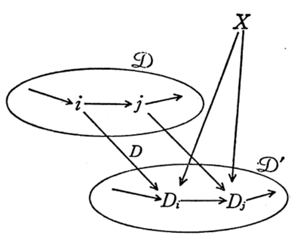



図 2

さて $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}(\varDelta X, D)$ の元をあたえるということは図1で┈┈▸の部分の対応をあたえることである（勿論 $\varDelta X$ から $D$ への natural transformation になっているようなものである）．これは図2において $X$ から $\mathscr{D}'$ への $\longrightarrow$ の対

応をあたえて図 2 が可換になっているということと同等である.

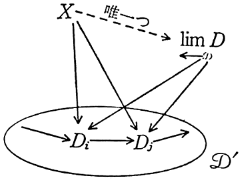



図 3

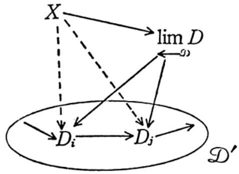



図 4

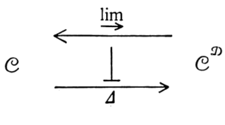
ところで図 2 があたえられるということは $\varprojlim_{\mathscr{D}} D$ が存在するときには図 3 の----->の所があたえられることと同等である. 逆に $X \longrightarrow \varprojlim_{\mathscr{D}} D$ の射があたえられるということは図 4 の----->の所が $X \longrightarrow \varprojlim_{\mathscr{D}} D$ と $\varprojlim_{\mathscr{D}} D$ から $\mathscr{D}'$ の中への射との結合として唯一通りにあたえられるということになる. 以上を総合して

$$\mathscr{C}^{\mathscr{D}}(\varDelta X, D) \simeq \mathscr{C}(X, \varprojlim_{\mathscr{D}} D)$$

なる同形対応があたえられて明らかに自然な対応になっている.

この定理と全く同様に次の定理が証明される.

**定理 10** $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ を二つの圏とし, すべての $\mathscr{D}$ から $\mathscr{C}$ への関手 $D: \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ に対して $\varinjlim_{\mathscr{D}} D$ が $\mathscr{C}$ に存在するとき, $\varinjlim_{\mathscr{D}} \dashv \varDelta$ すなわち $\varinjlim_{\mathscr{D}}$ は $\varDelta$ の左随伴関手である. 状況を図でかけば次のようになる.




すなわち全体として次のようになる.

$$\varinjlim \dashv \varDelta \dashv \varprojlim$$

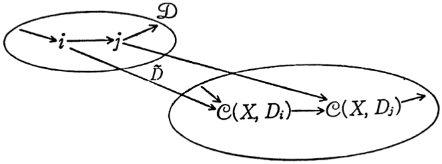
これを覚えるのには lim の下の矢印が両方とも真中の $\varDelta$ の方に向っていることを覚えておけばよい.

さて $\mathscr{C}, \mathscr{D}$, $D: \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$, $\mathscr{D}'$ をいままで通りとする. このとき $X$ を $\mathscr{C}$

の対象として

$$\tilde{D}\colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

なる関手 $\tilde{D}$ を $\mathscr{C}(X, D(-))$ で定義する.




このときの $\varprojlim_{\mathscr{D}} \tilde{D}$ のことを $\varprojlim_{\mathscr{D}} \mathscr{C}(X, D)$ とかくことにする.

このとき可換な次の左のような図を考えることは，一点からできている集合 $\{*\}$ を考えて丁度可換な右のような図2を考えることに相当する.

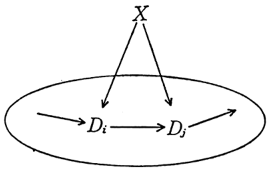



図 1

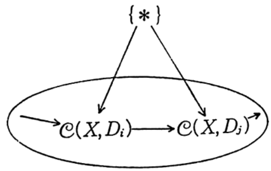



図 2

したがって次の図3において $\varprojlim_{\mathscr{D}} D$ が存在するということは図2において

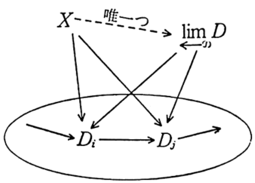



図 3

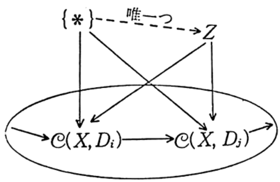
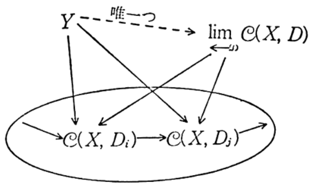



図 4

て $\{*\}$ からのどんな可換な図を考えても図4のように拡大して可換で $\overset{\text{唯一つ}}{\dashrightarrow}$ の場合が成立するような $Z$ が存在することを意味する. ところで集合 $Y$ からの関数は $Y$ の各点からの射影の和と考えられるから，上の図が $\{*\}$ に対して成立することは任意の集合 $Y$ とかえてもよいこと，すなわち $Z$ の所を

$\varprojlim_{\mathcal{D}} \mathcal{C}(X, D)$ にかえてよいことがわかる．図でかけば次の形となる．




これを定理の形でかけば次のようになる．

**定理 11** $\mathcal{C}, \mathcal{D}, D, X$ は上の通りとすれば

$$\mathcal{C}(X, \varprojlim_{\mathcal{D}} D) \simeq \varprojlim_{\mathcal{D}} \mathcal{C}(X, D).$$

ここに左辺の $\varprojlim_{\mathcal{D}}$ が存在すれば右辺の $\varprojlim_{\mathcal{D}}$ が存在し，逆にすべての $\mathcal{C}$ の対象 $X$ に関して右辺の $\varprojlim_{\mathcal{D}}$ が存在すれば左辺の $\varprojlim_{\mathcal{D}}$ も存在する．

全く同様の証明によって次の定理を得る．

**定理 12** $\mathcal{C}, \mathcal{D}, D, X$ は上の通りとすれば

$$\mathcal{C}(\varinjlim_{\mathcal{D}} D, X) \simeq \varprojlim_{\mathcal{D}} \mathcal{C}(D, X)$$

ここに lim の存在の条件は前と同様である．

**定理 13**

$$\mathcal{D} \xrightarrow{D} \mathcal{A} \ \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}}\ \mathcal{B} \quad (\perp)$$

であれば $U$ は limit を保つ．すなわち次が成立する．

$U(\varprojlim_{\mathcal{D}} D)$ と $\varprojlim_{\mathcal{D}} UD$ とは同等である．したがって一方が存在すれば他方も存在する．

証明)
$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(B, U(\varprojlim_{\mathcal{D}} D)) &\simeq \mathcal{A}(FB, \varprojlim_{\mathcal{D}} D) \\
&\simeq \varprojlim_{\mathcal{D}} \mathcal{A}(FB, D) \\
&\simeq \varprojlim_{\mathcal{D}} \mathcal{B}(B, UD) \\
&\simeq \mathcal{B}(B, \varprojlim_{\mathcal{D}} UD).
\end{aligned}$$

全く同様にして次の定理が成立する．

**定理 14**

$$\mathcal{A} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}} \mathcal{B} \overset{D}{\longleftarrow} \mathcal{D}$$

であれば $F$ は colimit を保つ．すなわち次が成立する．

$F(\varinjlim_{\mathcal{D}} D)$ と $\varinjlim_{\mathcal{D}} FD$ とは同等である．したがって一方が存在すれば他方も存在する．

## 6. 巾および開集合の圏

いま圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A, B$ に対していつでもその直積 $A\times B$ が $\mathcal{C}$ のなかに存在しているものとする．

このとき $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A$ について

$$(-)\times A: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

は明らかに関手になっている．この関手が右随伴関手をもつとき，その右随伴関手を $(-)^A$ で表わし，$A$ 巾乗の関手とよぶ．記号でかいて，またその右随伴関手の性質を式でかけば次のようになる．

$$\mathcal{C} \underset{(-)^A}{\overset{(-)\times A}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}} \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}(B\times A, C)\simeq\mathcal{C}(B, C^A).$$

**定義** $\mathcal{C}$ は圏として，$\mathcal{C}$ が巾のある圏ということを次の条件が満足されていることと定義する．

1) $\mathcal{C}$ は終対象をもっている．終対象を $1$ で表わす．(終対象は唯一つとは限らないが，すべて同等であるからそのうちどれでもとって $1$ と表わせばよい)

2) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A, B$ に対して $A\times B$ が $\mathcal{C}$ のなかに存在する．$A\times B$ から $A$ と $B$ とへの射を前と同じく $A \overset{\pi_1}{\longleftarrow} A\times B \overset{\pi_2}{\longrightarrow} B$ とかく．

3) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A$ に対して，$(-)\times A$ の右随伴関手 $(-)^A$ が存在す

る.

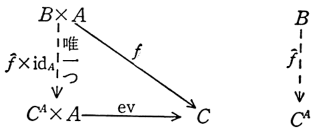
さて当分の間，巾のある圏 $\mathscr{C}$ を考えることにする．このとき明らかに

$$\mathscr{C}(C^A\times A, C)\simeq\mathscr{C}(C^A, C^A)$$

は自然な同形対応になっている．ここで右辺 $\mathscr{C}(C^A, C^A)$ の元 $\mathrm{id}_{C^A}$ に対応する左辺の $\mathscr{C}(C^A\times A, C)$ の元を ev で表わすことにする．記号でかくと次のようになる．

$$\frac{C^A \xrightarrow{\mathrm{id}_{C^A}} C^A}{C^A\times A \xrightarrow{\mathrm{ev}} C}$$

さてこの ev を用いると次の図

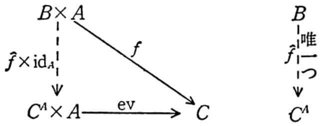



が可換となるような $\hat{f}: B\longrightarrow C^A$ が任意の射 $f\colon B\times A\longrightarrow C$ に対して唯一通りに存在する．これは次の推論から明らかであろう．

$$\begin{array}{c}
B\times A \xrightarrow{\quad f \quad} C \\
\hline
B \xrightarrow{\quad \hat{f} \quad} C^A \\
\hline
B \xrightarrow{\ \hat{f}\ } C^A \xrightarrow{\ \mathrm{id}_{C^A}\ } C^A \\
\hline
B\times A \xrightarrow{\hat{f}\times\mathrm{id}_A} C^A\times A \xrightarrow{\ \mathrm{ev}\ } C
\end{array}$$

$\hat{f}$ を $f$ の transpose という．

さて逆にすべての $\mathscr{C}$ の対象 $A, C$ に対して $C^A$ なる対象が存在して更にすべての射 $f\colon B\times A\longrightarrow C$ に対して $\hat{f}\colon B\longrightarrow C^A$, $\mathrm{ev}: C^A\times A\longrightarrow C$ なる射があって上の図が可換になるとする．このとき $f: B\times A\longrightarrow C$ なる射




に対して $\hat{f}: B \longrightarrow C^A$ なる射が唯一つ対応する．逆に $\hat{f}: B \longrightarrow C^A$ なる射を一つ定めれば $\mathrm{ev} \circ (\hat{f}\times \mathrm{id}_A)$ によって $B\times A \longrightarrow C$ なる射が唯一つ定まる．したがって

$$\mathscr{C}(B\times A, C)\simeq \mathscr{C}(B, C^A)$$

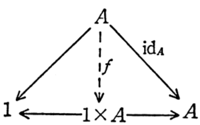
となってこの同形対応が自然な同形対応になる．

したがって $\mathscr{C}$ が巾のある圏だということを，$1, A\times B, \pi_1, \pi_2, C^A, \mathrm{ev}$ および任意の $f: B\times A \longrightarrow C$ に対してその transpose $\hat{f}: B \longrightarrow C^A$ があって，$1, A\times B, \pi_1, \pi_2$ についてはこれまで通りの公理をみたし，$C^A$, ev, transpose に対しては上の図の性質がみたされていることと定義してよい．

次に巾のある圏 $\mathscr{C}$ について簡単な性質をいくつかあげることにしよう．

1) $A$ と $1\times A$ とは同等である．

$1\times A \underset{f}{\overset{\pi_2}{\rightleftarrows}} A$ ここに $f$ は




によって定義される．図から明らか．

2) $(-)\times A$ は colimit を保つ．例として

$$(B \amalg C)\times A \simeq B\times A \amalg C\times A.$$

ここに $\simeq$ は同等の意味に用いた．

これは $(-)\times A$ が左随伴関手であることから定理 14 から明らか．上の例で $B\amalg C$ を $B+C$ とかけばもっとナジミの式であることがわかるであろう．

3) $(-)^C$ は limit を保つ．例として

$$(A\times B)^C\simeq A^C\times B^C,\quad \text{および},\quad 1^C\simeq 1.$$

これも定理 13 から明らか.

4) $$A\times B\simeq B\times A,\quad A\times(B\times C)\simeq(A\times B)\times C.$$

明らかであろう.

5) $$(C^A)^B\simeq C^{A\times B}.$$

これは次の式から明らかであろう.

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(X,(C^A)^B)&\simeq\mathscr{C}(X\times B,C^A)\\&\simeq\mathscr{C}(X\times B\times A,C)\\&\simeq\mathscr{C}(X\times(A\times B),C)\\&\simeq\mathscr{C}(X,C^{A\times B}).\end{aligned}$$

6) $$C^{\varinjlim D_i}\simeq\varprojlim C^{D_i}.$$

ここに $\varinjlim D_i$ は正式には $\varinjlim_{\mathscr{D}} D_i$ の形に書かねばならないが, この方が直観的で意味に誤解の恐れがないのでこう書くことにする. 次の式から明らかである.

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(X,C^{\varinjlim D_i})&\simeq\mathscr{C}(X\times\varinjlim D_i,C)&&\\&\simeq\mathscr{C}(\varinjlim(X\times D_i),C)&&(\text{定理 }13)\\&\simeq\varprojlim\mathscr{C}(X\times D_i,C)&&(\text{定理 }12)\\&\simeq\varprojlim\mathscr{C}(X,C^{D_i})&&\\&\simeq\mathscr{C}(X,\varprojlim C^{D_i}).&&(\text{定理 }11)\end{aligned}$$

さて再び一般の圏 $\mathscr{C}$ について考えることにする.

集合 $P$ と $P$ の上の関係 $\leqslant$ とが半順序集合 (partially ordered set) であるということは $\leqslant$ が次の三つの条件をみたすことをいう. ここに $a,b,c$ は $P$ の元である.

1) $a\leqslant a$ が成立する,

2) $$a\leqslant b,\ b\leqslant a\Longrightarrow a=b,$$

3) $$a\leqslant b,\ b\leqslant c\Longrightarrow a\leqslant c.$$

半順序集合 $\langle P,\leqslant\rangle$ があたえられたとき, この半順序集合からできる圏 $C$

とは次のように定義される.

1)　$C$ の対象は $P$ の元である.

2)　$C$ の射 $f: a \longrightarrow b$ とは $a \leqslant b$ な $a, b$ に対して唯一つ対応させられる. 少し乱暴な書き方をすれば次のようにかいてもよいだろう.

$$a \longrightarrow b \Leftrightarrow a \leqslant b$$

$X$ を位相空間とする. このとき $X$ の開集合の半順序集合を $\langle O(X), \subseteq \rangle$ によって定義し, この半順序集合からできる圏のことを, $X$ の開集合の圏といって $\mathcal{T}_X$ で表わす.

さてこの圏の言葉を用いれば $X$ の上の前層全体の圏の定義は

$$\mathrm{Sets}^{\mathcal{T}_X{}^{\mathrm{op}}}$$

という圏として一言でのべることができる. すなわち $F$ をこの圏の対象とすれば

$$F: \mathcal{T}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

が関手であり, すなわち $X$ の開集合 $U$ に対して $F(U)$ が集合であって $U \subseteq V$ のときは $\mathcal{T}_X^{\mathrm{op}}$ では $V \longrightarrow U$ であるから

$$F(V) \longrightarrow F(U)$$

なる関数が定義される. これを $r_{UV}$ とすればこれが前層の第二の定義になる. 但し $F(\phi)$ は一点だけからなる集合に直して考えるものとする.

さてこのように圏の言葉を用いるとすれば, 層の定義はどのようにのべられるであろうか? いま $F$ を

$$F: \mathcal{T}_X^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

なる関手として $F$ が層になる条件を考えよう. 前にのべた層の第一の条件をここでの言葉でのべてみると,

$U = \bigcup U_i$ として $f_i \in F(U_i)$ とする. (前の言葉では $\mathrm{E} f_i = U_i$).

いますべての $i, j$ について

$$r_{U_i \cap U_j, U_i} f_i = r_{U_i \cap U_j, U_j} f_j$$

が成立していたとする. (前の言葉では $f_i \upharpoonright \mathrm{E} f_j = f_j \upharpoonright \mathrm{E} f_i$). このとき $g \in F$

$(U)$（前の言葉では $\mathrm{E}g=\bigcup_i \mathrm{E}f_i$）で $r_{U_i,U}g=f_i$（前の言葉では $g\urcorner \mathrm{E}f_i=f_i$）になるような $g$ が唯一通り存在する．

さてこれをもう一度いいかえれば

$$r_{U_i\cap U_j,U_i}f_i=r_{U_i\cap U_j,U_j}f_j$$

が成立するような $i\longmapsto f_i$ の組は

a)　$$\prod r_{U_i\cap U_j,U_i}:\ \prod_i F(U_i)\longrightarrow \prod_{i,j}F(U_i\cap U_j),$$

b)　$$\prod r_{U_i\cap U_j,U_j}:\ \prod_j F(U_j)\longrightarrow \prod_{i,j}F(U_i\cap U_j)$$

なる二つの写像の像が一致するような $\prod_i F(U_i)$ の元を意味する．このような元に対して $r_{U_i,U}g=f_i$ となるような $g$ が唯一通り，$F(U)$ に存在するということはそのような元全体の集合は

$$\prod r_{U_i,U}:\ F(U)\longrightarrow \prod_i F(U_i)$$

なる写像の像になっていて，この写像が一対一の写像になっていることを意味する．これは普通

$$F(U)\longrightarrow \prod_i F(U_i)\rightrightarrows \prod_{i,j}F(U_i\cap U_j)$$

なる図が exact であるという言葉で一言で表わす．$\rightrightarrows$ の所は上の a), b) なる二つの写像を表わしている．実はこれは上の図が単に equaliser の図になっていることを表わしているにすぎない．したがって前層が層であるための条件は上の図が equaliser の図になっていることであると一言で表わせばよいのである．

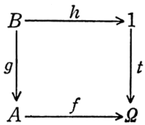
# 第3章　トポス

## 1. トポスの定義

$\mathcal{C}$ を巾をもった圏とする．前と同じく，$1, A\times B, \pi_1, \pi_2, A^B, \mathrm{ev}, f$ などの記号を用いることにする．

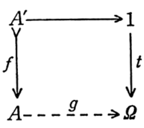
いま $\Omega$ なる $\mathcal{C}$ の対象と $t\colon 1 \longrightarrow \Omega$ なる $\mathcal{C}$ の射があったとき（$t$ は true ともしばしばかかれる），$t\colon 1 \longrightarrow \Omega$ が a subobject classifier であるということを次の二条件をみたすことと定義する．

1）任意の射 $A \xrightarrow{f} \Omega$ に対して




が pullback になるように $g, h$ をとることができる．

2）任意の mono $f\colon A' \rightarrowtail A$ に対して




が pullback になるような $g$ が唯一通りに存在する．ここに $g$ のことを $f$ の classifier であるといって $\mathrm{cl}(f)$ とかかれる．

subobject classifier の例として一番よいのは第1章で作った $t\colon 1 \longrightarrow \Omega$ である．すなわち $X$ を位相空間として $\mathrm{Top}(X)$ なる圏で考えるのである．

第1章で $t: 1 \longrightarrow \Omega$ が subobject classifier の性質をみたすことが証明された．

もう一つのよい例は $\mathscr{C}$ が Sets のときに，1 を何か一点からなる集合として $\Omega=\{\phi, 1\}$ として，$t: 1 \longrightarrow \Omega$ を1の元を1に対応させる写像とすれば，若し $A' \overset{f}{\rightarrowtail} A$ としたとき，一般性を失うことなく $A'$ は $A$ の部分集合として

$A-A'$ の元を $\phi$ に対応させ，

$A'$ の元を1に対応させる

対応を $g$ とすれば，$g$ が $\mathrm{cl}(f)$ になっていることは明らかであろう．

**定義** 圏 $\mathscr{C}$ がトポス (topos) であるとは次の条件をみたすことと定義する．

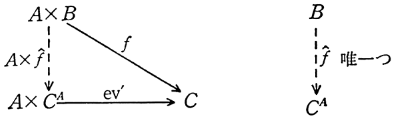
1) $\mathscr{C}$ は巾のある圏である．$1, A\times B, \pi_1, \pi_2, A^B, \mathrm{ev}, \hat{f}$ などの記号を今まで通り使うことにする．

2) $\mathscr{C}$ には subobject classifier $t: 1 \longrightarrow \Omega$ が存在する．

上の説明から明らかなように Sets, Top$(X)$ はトポスである．更に $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ がトポスのとき $\mathscr{C}_1\times\mathscr{C}_2$ もトポスになるが，これは演習問題として確めてみられたい．

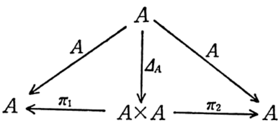
以下に $\mathscr{C}$ がトポスとして，$\mathscr{C}$ のなかに $\longrightarrow$ を追いかける位で証明できる初等的な性質を少し証明することにする (第2章 §1 をできればもう一度眺めてほしい)．その前に $\mathrm{id}_A: A \longrightarrow A$ はしばしばかくのに繁雑な場合があるので，この $\mathrm{id}_A$ のことを単に $A$ ともかくことにする．たとえば上の射は $A \overset{A}{\longrightarrow} A$ という風に表わすことにする．

さて次に $A\times B \simeq B\times A$ であるから

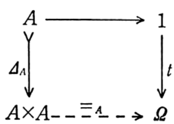


となるような ev′ が存在することが容易にわかるが，以下一々区別するのも面倒なので ev′ のことも単に ev とかくことにする．

**定義** $\Delta_A=\langle A, A\rangle$ によって $\Delta_A$ を定義する．もっと詳しくいえば次の図で定義される．

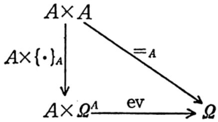



$\Delta_A$ は明らかに mono であるから $=_A$ を $\mathrm{cl}(\Delta_A)$ であると定義する．詳しい図をかけば




以下トポスのすべての定義においてそうであるが $=_A$ が何を意味するかを Sets と Top$(X)$ で考えることは理解を助けるために大いに役立つので是非考えてみてほしい．

**定義** $\{\cdot\}_A$: $A\longrightarrow\Omega^A$ を次の図によって定義する．



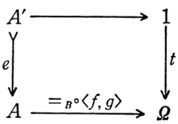

$\{\cdot\}_A$ のことを singleton の射という．

**定理 1** トポスには equaliser がいつでも存在する．

証明） $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ の equaliser をつくることにする．

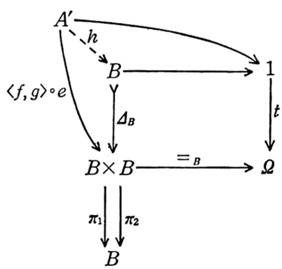
$$A \xrightarrow{\langle f,g\rangle} B\times B \xrightarrow{=_B} \Omega$$

であるから，次の図によって $e$ を定義する．




第2章定理3によって$e$は mono である．

いま $A' \overset{e}{\rightarrowtail} A$ が求める equaliser であることは次の図と説明から明らかであろう．




まず$e$の作り方から

$$=_B\circ\langle f,g\rangle\circ e=t\circ(A'\longrightarrow 1)$$

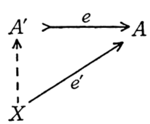
は明らかだから，$\overset{h}{\dashrightarrow}$が存在する．

$$\begin{aligned}f\circ e&=\pi_1\circ\langle f,g\rangle\circ e\\&=\pi_1\circ\langle B,B\rangle\circ h\\&=h.\end{aligned}$$

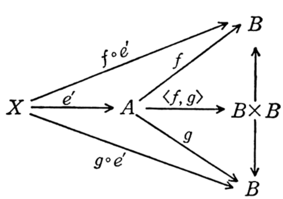
これを逆にやって $g\circ e=h$，ゆえに

$$f\circ e=g\circ e.$$

次に $X\xrightarrow{e'}A\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}B$ で $f\circ e'=g\circ e'$ であるとして，



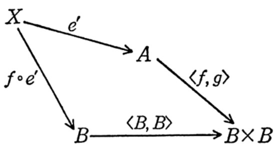

が可換となるような$\dashrightarrow$が唯一つ存在することを証明しよう．まず次の図から



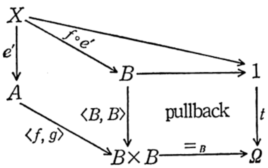
$$\langle f, g\rangle \circ e' = \langle f \circ e', g \circ e'\rangle$$

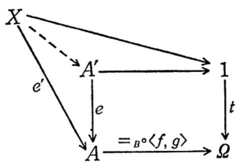
であることがわかる．

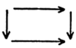
したがって次の図は可換となる．




したがって次の左の図が可換であるから，右の$\dashrightarrow$のない図は可換で，中の



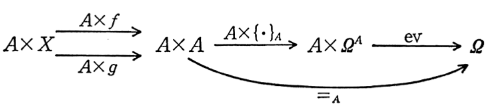

 が pullback であるから $X \dashrightarrow A'$ なる射が唯一つ存在する．

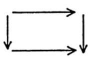
**系**　トポスには pullback がいつでも存在する．

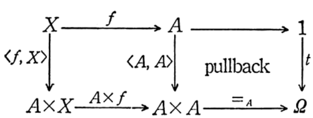
証明）　第2章定理5より明らか．

**定理 2**　$\{\cdot\}_A$ は mono である．

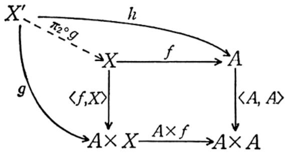
証明）　$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\{\cdot\}_A} \Omega^A$ が可換，すなわち $\{\cdot\}_A \circ f = \{\cdot\}_A \circ g$ として $f = g$ を証明する．$=_A$ の定義により次の図は可換である．




もし右図の左の  が pullback であることをいえば全体の長方形も pullback で，しかも $f$ と $g$ をかえたものにも同じことが成立する．



ところで $(=_A\circ(A\times f))=(=_A\circ(A\times g))$ であるから長方形が pullback であることから，$\langle f, X\rangle=\langle g, X\rangle$．したがって $f=g$ がでてくる．




ところでそのことをいうために左の図で----→を除いたものを可換とすれば----→が $\pi_2\circ g$ となって唯一通りのことが直ぐわかるからよい．

**定義**　$A, B$ をトポス $\mathscr{C}$ の対象とする．このとき $A$ から $B$ への partial map というのは次の条件をみたす二つの射の組 $(f, d)$ のことをいう．

$$d\colon A' \rightarrowtail A,\quad f\colon A' \longrightarrow B.$$

このとき $(f, d)\colon A \longrightarrow B$ とかく．

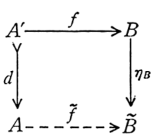
この partial map の意味は定義から自明であろう．$d\colon A' \rightarrowtail A$ から $A'$ は $A$ の部分対象だと思えばよく，$f\colon A' \longrightarrow B$ は $A$ の部分対象からの射になっているということである．

**定義**　$B$ はトポス $\mathscr{C}$ の対象とする．このとき

$$\eta_B\colon B \longrightarrow \tilde{B}$$

が $B$ の partial map classifier であることを次の条件がみたされていることと定義する．

すべての $(f, d)\colon A \longrightarrow B$ に対して次の図が pullback になるような $\tilde{f}\colon A \longrightarrow \tilde{B}$ が唯一通り存在する．

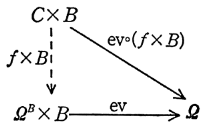



さてこれからトポスにはすべての対象に必ずその partial map classifier が存在することを証明するが，証明が長いので少しずつ順々に証明して行く．

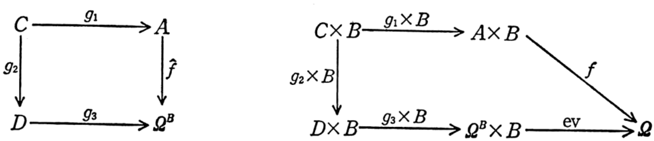
**補題 1**　次の図が可換ならば $f=g$ となる．

$$C\times B \underset{g\times B}{\overset{f\times B}{\rightrightarrows}} \Omega^B\times B \xrightarrow{\mathrm{ev}} \Omega$$

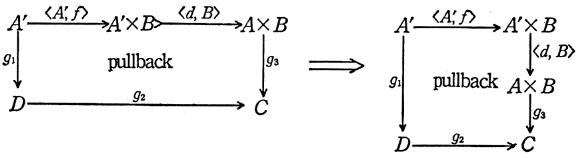
証明） 次の図で $f\times B$ の所が唯一つで，$f$ と $g$ とをとりかえてもよいことからわかる．




**系** 次の二つの図で，一方が可換なることともう一つが可換なことは同等である．

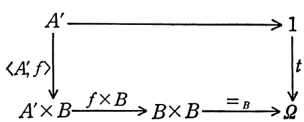



**補題 2**

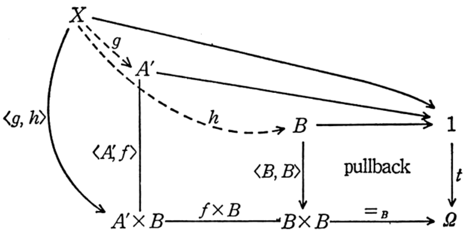


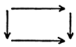

証明） $\langle d, B\rangle$ が mono から明らか．

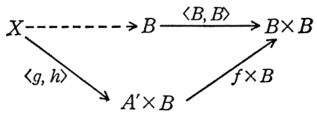
**補題 3** 次の図は pullback である．




証明） 次の図で考える．



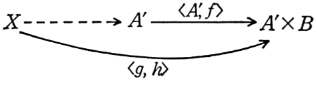

まず----→のない図が可換とする．このとき $X \dashrightarrow A'$ なる射が唯一通り存在することをいえばよい．ところで $X \longrightarrow A'\times B$ なる射は $\langle g, h\rangle$ なる形としてよい．一番内側の  は pullback であるから $X \dashrightarrow B$ なる射が唯一通り存在する．ところでこれは




が可換であるから，$X \overset{h}{\dashrightarrow} B$ であることと

$$f\circ g=h$$

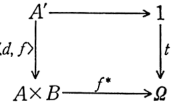
であることがわかる．したがって $X \dashrightarrow A'$ を $g$ とおけば図全体（----→を入れて）が可換であることがわかる．また更に $X \dashrightarrow A'$ が $g$ でなければならないことは



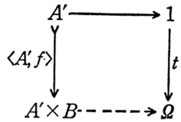

が可換であることから明らかである．

**系**　$(f, d): A \longrightarrow B$ で $d: A' \longrightarrow A$ とする．このとき次の図が pullback とすれば

$$f^*\circ(d\times B)=(=_B\circ(f\times B))$$




証明） 次の pullback な図を考える．

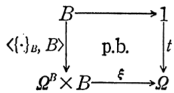


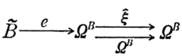

この- - - -→の所は補題3によれば $=_B\circ(f\times B)$ となる．ところで系の仮定からはこれは $f^*\circ(d\times B)$ となる．したがって求める次の式が得られる．

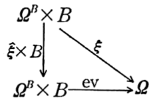
$$f^*\circ(d\times B)=(=_B\circ(f\times B)).$$

**定理 3** トポス $\mathscr{C}$ のすべての対象 $B$ に partial map classifier が存在する．

証明） まず $\tilde{B}$ を次の図で作る．



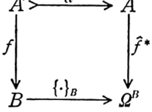



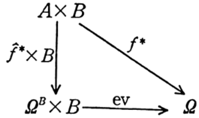

ここに p. b. は pullback の略で今後常用することにする．また $e:\tilde{B}\longrightarrow\Omega^B$ は $\Omega^B\rightrightarrows\Omega^B$ の equaliser とする．

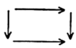
さて $(f,d):A\longrightarrow B,\ d:A'\rightarrowtail A$ として色々の性質を証明して行くことにする．

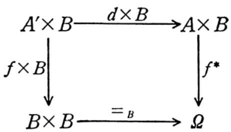
**1)**



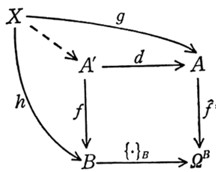

は p. b. である．ここに $\hat{f}^*$ は補題3の系の図で定義された $f^*$ から次の図によってできたものとする．



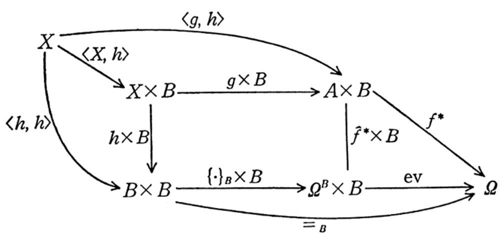

さてまず p. b. を証明する前に  が可換であることをいおう．これは補題1の系によって次の図が可換であることをいえばよい．ところでこれは補題3の系から明らかである．




さて p. b. であることを証明するためには，次の図




で-----→がないものが可換であると仮定して，全体が可換となるような-----→が唯一つ存在することをいえばよい．このため次の図を考える．

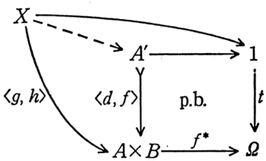



この図が可換であることは上の図と補題1の系とから明らかであろう．

したがって次の計算が成立する．

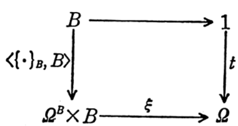
$$
\begin{aligned}
f^* \circ \langle g, h\rangle &= (=_B \circ \langle h, h\rangle)\\
&= (=_B \circ \langle B, B\rangle \circ h)\\
&= t \circ 1_B \circ h\\
&= t \circ 1_X.
\end{aligned}
$$

ここに $1_B$ は $B \longrightarrow 1$ なる射のことであって，今後この記号は常用することにする．

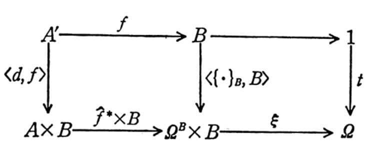


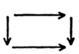

この計算から，上の図から- - - - ->をとり去ったものは可換であることがわかる．したがって図全体が可換であるような $X$- - - - ->$A'$ が唯一つであることがわかる．これが証明したいことであったことは明らかであろう．

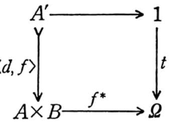
2)　　$f^* = \xi \circ (\hat{f}^* \times B).$

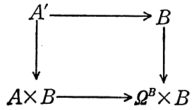



が p. b. であるから，

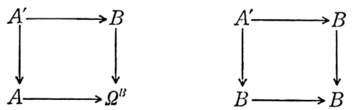



で左の  が p. b. であることをいえば，全体の長四角が p. b. であることがいえ，一方次の図も p. b. であるから，$f^* = \xi \circ (\hat{f}^* \times B)$ と求める式が得られる．



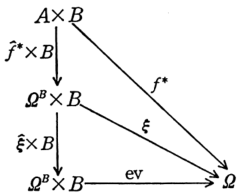




ところで左の図が p.b. であることは次の下図の両方共 p.b. であることから明らか.

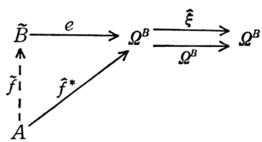



3) $\hat{f}^*=\hat{\hat{\xi}}\circ\hat{f}^*$.

2)から右の図が可換であることがわかる. これから求めるものは明らか.



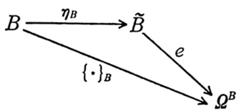

4) さて 3) によって




の----→のない図が可換であることがわかる. ところで $e$ は equaliser だから全体の図が可換となるような $\tilde{f}$ が唯一通りに定まることがわかる. この $\tilde{f}$ があとで partial map classifier の $\tilde{f}$ であることがわかる.

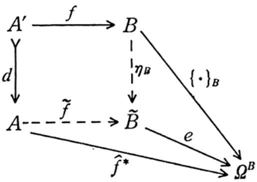
ここで $(f, d): A \longrightarrow B, d: A' \rightarrowtail A$ の特別な場合として $(B, B): B \longrightarrow B, B: B \longrightarrow B$ をとることにする. 明らかにこの場合には $B^*$ は $=_B$ のことであり, $\hat{B}^*$は $\{\cdot\}_B$ のことである. したがって次の図が可換である

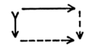
ような $\eta_B$ が唯一通りに存在することがわかる.

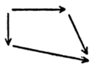
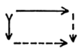


この $\eta_B$ を partial map classifier の $\eta_B$ と定義するのである.

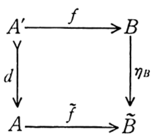
5)



左の図において  は p.b. である.

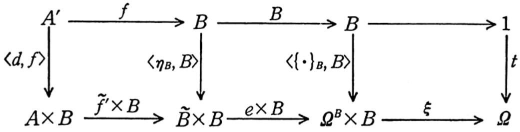
まず  が p.b. であることと $e$ が mono であることから明らかに  は可換, そして p.b. も明らか.

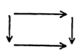
6)



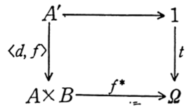
が p.b. となるような $\tilde{f}$ が唯一通りに定まること.

そのような $\tilde{f}'$ がもう一つあるものとして $\tilde{f}=\tilde{f}'$ を証明する.



このとき仮定から一番左の  は p.b., あとの二つの小四角形が p.b. であることは明らかだから全体が p.b. である.

一方



が p.b. であるから次の式が得られる.

$$\xi\circ((e\circ\tilde{f})\times B)=f^*.$$

この式と ^ の定義から次の等式が得られる.

$$\hat{f}^*=\hat{\xi}\circ e\circ\tilde{f}'$$

$$=e\circ\tilde{f}'.\qquad (e \text{ の定義から})$$

ところで $\hat{f}^*=e\circ\tilde{f}$ （$f$ の定義から）であるから

$$e\circ\tilde{f}'=e\circ\tilde{f}.$$

ところで $e$ は mono であるから $\tilde{f}=\tilde{f}'$ が得られた.

さて $\xi, \hat{\xi}, e, \tilde{B}$ を全部今まで通りとしてその簡単な性質を証明しておこう.

**定理 4**　次の性質が成立する.

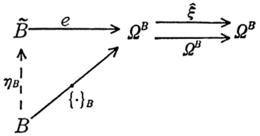
1)　$$(=_B)=\xi\circ(\{\cdot\}_B\times B).$$

2)　$$\{\cdot\}_B=\hat{\xi}\circ\{\cdot\}_B.$$

3)　$\eta_B$ は mono である.

証明）1), 2) は定理3の 2), 3) において $(f, d)$ を $(B, B)$ とした特別な場合である.

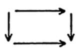
3) は次の $\eta_B$ の定義の図において $\{\cdot\}_B$ が mono であることから明らかである.

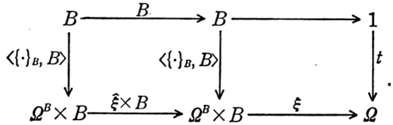


**定理 5**　$\tilde{B} \overset{e}{\rightarrowtail} \Omega^B$ （$\Omega^B \overset{r}{\dashrightarrow} \tilde{B}$）で $r \circ e = \tilde{B}$ なる $r$ が存在する.

証明）　定理4の 2）によって

$$\hat{\xi} \circ \{\cdot\}_B = \{\cdot\}_B$$

であるから下の図の左の  は p.b. である．したがって全体長四角は p.b. である．ゆえに次の式が得られる．

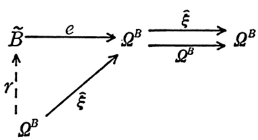



$$\xi \circ (\hat{\xi} \times B) = \xi.$$

これから容易に次の式が得られる．

$$\hat{\xi} \circ \hat{\xi} = \hat{\xi}.$$

この式から次の図の $\overset{r}{\dashrightarrow}$ が唯一通り存在することがわかる．

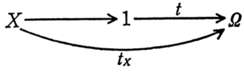



さてこの図をみれば容易に次の式が成立する．

$$e \circ \tilde{B} = e = \hat{\xi} \circ e = e \circ r \circ e.$$

ところで $e$ は mono であるから $\tilde{B} = r \circ e$ が得られた．

**定義**　$t \circ 1_X$ なる射を $t_X$ で表わす．すなわち




**定理 6**　$\tilde{B} \times X \xrightarrow{\pi_2} X$ （$X \overset{s}{\dashrightarrow} \tilde{B} \times X$）で $\pi_2 \circ s = X$ なる $s$ が存在する．

証明）　明らかに $X \longrightarrow \tilde{B}$ なる射があることをいえば充分である．

$$\begin{array}{ccc} X\times B & & \\ {\scriptstyle \hat{t}_{X\times B}\times B}\downarrow & \searrow {\scriptstyle t_{X\times B}} & \\ \Omega^B\times B & \xrightarrow{\text{ev}} & \Omega \end{array}$$

とすれば

$$X \xrightarrow{\hat{t}_{X\times B}} \Omega^B \xrightarrow{r} \tilde{B}$$

となるから $X \longrightarrow \tilde{B}$ なる射が存在する．

## 2. トポスの例

Sets とか Top($X$) とかは代表的なトポスであるが，トポスの一つの特色は他の圏から容易に新しいトポスが作れることである．ここにそのなかから代表的な例をとりあげることにする．

$\mathcal{C}$ を任意の圏（したがってトポスとは限らない）とする．このとき次の $\mathcal{E}$ はトポスである．

$$\mathcal{E}=\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$$

以下に $\mathcal{E}$ がどのようにトポスになっているかを示すことにする．

1）$\mathcal{E}$ における 1

Sets における 1 をやはり 1 とかくことにすれば，$\mathcal{E}$ における 1 は $1(A)=1$ で定義された

$$1:\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

である．$\mathcal{E}$ の任意の対象 $F$ をとるとき，$s:F\longrightarrow 1$ なる $s$ が唯一つ存在することは次の図からも明らかであろう．

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \ \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad F \quad} \\ \Downarrow s \\ \xrightarrow[\quad 1 \quad]{} \end{array} \ \mathrm{Sets}$$

2）$\mathcal{E}$ における $\times$

$F, G$ を $\mathcal{E}$ の対象とする．このとき $F\times G$ を

$$(F\times G)(A)=F(A)\times G(A)$$

によって定義する．右辺の × は勿論 Sets の × である．この × が $\mathcal{E}$ で直積の定義をみたすことは Sets の × の性質から直ちに得られる．

3)　$\mathcal{E}$ における巾

$F, G$ を $\mathcal{E}$ の対象とする．いま求める $G^F$ が $\mathcal{E}$ で定義できたとすると米田のレンマにより

$$\begin{aligned} G^F(A) &\simeq \mathrm{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{C}(-,A), G^F) \\ &\simeq \mathrm{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{C}(-,A)\times F, G) \end{aligned}$$

とならねばならないことがわかる．したがって我々は逆に $G^F$ を

$$G^F(A)=\mathrm{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{C}(-,A)\times F, G)$$

によって定義するのである．この定義が巾の公理をみたすことを読者への宿題にしておきたい．

4)　$\mathcal{E}$ における $\Omega$

まず Sets の $\Omega$ をやはり $\Omega$ でかくことにする．勿論 Sets の $\Omega$ は $\{\phi, 1\}$ のように固定してしまっても構わない．

いま $F, G$ が $\mathcal{E}$ の対象とするとき，

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathrm{Sets}$$

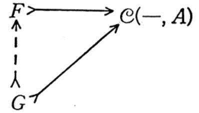
と $F, G$ を考えて，$F$ が $G$ の部分関手であるということを $F \rightarrowtail G$ で表わして次の条件で定義する．

どんな $B$ をとっても，$F(B) \rightarrowtail G(B)$．

このとき $\mathcal{E}$ の $\Omega$ を次の式で定義する．

$$\Omega(A)=\{F|F \rightarrowtail \mathcal{C}(-,A)\}/\equiv.$$

ここに ≡ は $F$ についての同等を表わす同値関係であって



なるときに $G \leqslant F$ で $G \leqslant F$ で $F \leqslant G$ のときに $F \equiv G$ と定義するのである.

さて以上の $\mathscr{E}$ のことを圏 $\mathscr{C}$ の上の前層としばしばよんでいる.

さて上の $\mathscr{E}$ の特別な場合を考えよう. $\langle P, \leqslant \rangle$ を半順序集合として, $\mathscr{P}$ をこの半順序集合の圏とする. いま $\mathscr{C} = \mathscr{P}^{\mathrm{op}}$ として上の $\mathscr{E} = \mathrm{Sets}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ を考える. すなわち $\mathscr{E} = \mathrm{Sets}^{\mathscr{P}}$ である. この場合上の定義がどうなっているか考えてみよう.

まず, $\mathscr{C}(-, A)(B) = \mathscr{C}(B, A)$ は $A \leqslant B$ のときに唯1個 (すなわち $\mathscr{P}^{\mathrm{op}}$ での $B \longrightarrow A$) 存在して, そうでないときは存在しないのだから,

$$\mathscr{C}(-, A)(B) = \begin{cases} 1 & A \leqslant B \text{ のとき,} \\ \phi & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

としてよい. ここに1は Sets の1である.

今後 $A\!\uparrow$ によって次の集合を表わすものとする.

$$A\!\uparrow = \{B | A \leqslant B\}.$$

このとき $\mathscr{E}$ における $G^F$ は前の定義により

$$\begin{aligned} G^F(A) &= \mathrm{Sets}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(\mathscr{C}(-, A) \times F, G) \\ &= \mathrm{Sets}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(F \ulcorner A\!\uparrow, G \ulcorner A\!\uparrow). \end{aligned}$$

ここに $F \ulcorner A\!\uparrow$ になる理由は $B \notin A\!\uparrow$ ならば $\mathscr{C}(B, A)$ が空になってしまうからである. $G \ulcorner A\!\uparrow$ になる理由は $F \ulcorner A\!\uparrow$ の方が空になればその像も空でしかあり得ないからである.

同様にして $\mathscr{E}$ における $\Omega$ を考えるためにまず

$\mathscr{C}(-, A)$ の部分関手が何になるか

を考えてみると

$\mathscr{C}(-, A)(B)$ は $\phi$ か1かのどちらか

であるから, その部分関手 $F$ も $F(B)$ が $\phi$ か1かのどちらかでなければならない. 今一度 $F(B) = \phi$ となったとして $B_1 \leqslant B$ とすると $F$ は関手であるから

$$\begin{array}{c} B_1 \\ \uparrow \\ B \end{array} \quad \mathscr{C} \quad \text{ならば} \quad \begin{array}{c} F(B_1) \\ \downarrow \\ F(B) \end{array} \quad \text{Sets}$$

であって，$F(B)=\phi$ であるから $F(B_1)=\phi$ でなければならない．すなわち，$\mathscr{C}(-, A)$ の部分関手 $F$ は次の条件をみたさなければならない．

1)　$F(B)$ は $\phi$ か $1$.

2)　$B_1 \leqslant B, F(B)=\phi \Longrightarrow F(B_1)=\phi.$

3)　$F(B)=1 \Longrightarrow A \leqslant B.$

逆に $F$ がこの 1), 2), 3) の条件をみたせばこれが $\mathscr{C}(-, A)$ の部分関手になっていることは明らかだから，$\Omega(A)$ はこのような $F$ の全体の集合になっている．

特に $\langle P, \leqslant\rangle$ が整列集合である場合はこのような $F$ は一つの $A \leqslant B_0$ なる $B_0$ を定めて

$$B<B_0 \Longrightarrow F(B)=\phi,$$

$$B_0 \leqslant B \Longrightarrow F(B)=1$$

と表わされるから

$$\Omega(A)=\{B_0 | A \leqslant B_0\}$$

と定義してよいことがわかる．

さて今度はまた別の作り方を考えよう．

いま $\mathscr{C}$ を圏（トポスとは限らない）として $A$ を $\mathscr{C}$ の対象とする．このとき $\mathscr{C}/A$ なる圏を次のように定義する．

$\mathscr{C}/A$ の対象は $B \xrightarrow{p} A$ なる $\mathscr{C}$ の射である．

$\mathscr{C}/A$ の射は $\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ & {}_{p}\searrow \quad \swarrow_{q} & \\ & A & \end{array}$ が可換であるような $\mathscr{C}$ の射 $f$ である．

すなわち $f\colon (B \xrightarrow{p} A) \longrightarrow (C \xrightarrow{q} A).$

このとき $\mathscr{C}/A$ が圏になることは見易いであろう．

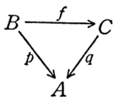
さてこの $\mathscr{C}/A$ を $\mathscr{C}$ が Sets である特別な場合に考えてみよう．

この場合 $B \xrightarrow{p} A$ はすべての $a \in A$ に対して

$$a \longmapsto p^{-1}(a)$$

なる対応を定めれば一意的に定まる．ここで $p^{-1}(a)$ は本当は $p^{-1}(\{a\})$ とかくべきであるが，ここでは俗な慣用にしたがって $p^{-1}(a)$ とかくことにする．だからこの対応をキチンとかけば $\{(a, p^{-1}(a))|a \in A\}$ なる集合をあたえることになっている．

さて




なる Sets/$A$ の射は何を意味するだろうか．この対応は明らかに，$p^{-1}(a)$ の元は $q^{-1}(a)$ の元に対応させなければならないから，$a \in A$ を定めるごとに

$$f_a : p^{-1}(a) \longrightarrow q^{-1}(a)$$

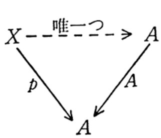
なる対応を定めることになっている．

逆にすべての $a \in A$ に対してこの条件をみたす $f_a$ を定めれば，$f$ が唯一通りに定まることは明らかであるから，上のような $f$ は，上の条件をみたす $f_a$ をとって，$\{(a, f_a)|a \in A\}$ なる集合で表わすことができる．

さて我々が次にやろうということは $\mathscr{E}$ がトポスの場合に $\mathscr{E}/A$ がやはりトポスになることである．少しずつやって行くことにする．

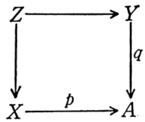
1)　$\mathscr{E}/A$ の 1

$\mathscr{E}/A$ の 1 は $A : A \longrightarrow A$ であるとする．これが 1 の公理をみたすことは明らかであろう．

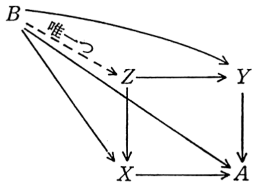



2)　$\mathscr{E}/A$ の直積

$\mathscr{E}/A$ の二つの対象を $X \xrightarrow{p} A, Y \xrightarrow{q} A$ とする．このとき $\mathscr{E}$ はトポスであるから pullback が存在して図のようなものとする．




この図における $Z \longrightarrow A$ が $\mathcal{E}/A$ における $X \xrightarrow{p} A$, $Y \xrightarrow{q} A$ の $\mathcal{E}/A$ における直積になっていることは次の図をみれば明かであろう．




以下この $Z$ のことを

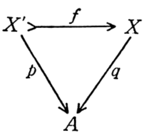
$$X \times_A Y$$

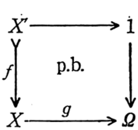
で表わすことにする．

3)　$\mathcal{E}/A$ の $\Omega$

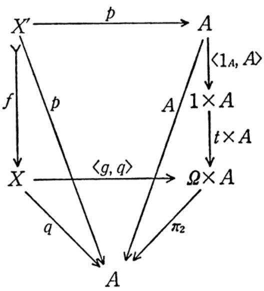
$\mathcal{E}$ の $\Omega$ をやはり $\Omega$ で表わすことにすると $\mathcal{E}/A$ の $\Omega$ は $\pi_2 \colon \Omega \times A \longrightarrow A$ となる．これが $\mathcal{E}/A$ の $\Omega$ になっていることは，まず $\Omega$ の $t$ を $\langle t_A, A\rangle$ で定義すれば，次の図から明らかであろう．($t_A$ は $A \longrightarrow 1 \xrightarrow{t} \Omega$（合成 $t_A$）のことである)．

まず $\mathcal{E}$ で




があたえられているとすれば，$\mathcal{E}/A$ での図は次の図のようになる．この図の正方形が p. b. になることは図から殆んど明らかであろう．

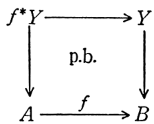



次の問題は $\mathcal{E}/A$ の巾であるが，これはちょっと手間がかかるので他の概念をまず構成してからにする．

さて $A, B$ をトポス $\mathcal{E}$ の対象として $f: A \longrightarrow B$ を射とする．このとき

$$f^*: \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$$

なる関手を図のように $Y \longrightarrow B$ に，$Y \longrightarrow B$ のと $A \xrightarrow{f} B$ の p. b. によって作られた $f^*Y \longrightarrow A$ を対応させるものとする．

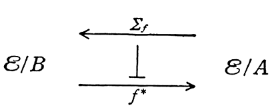



更に我々は

$$\Sigma_f: \mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/B$$

なる関手を $X \longrightarrow A$ なる射に $X \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ なる射を対応させるものとして定義する．

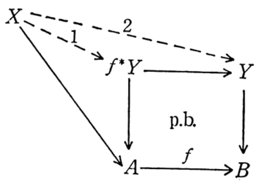
**定理 7**　$\Sigma_f$ は $f^*$ の左随伴関手である．すなわち



証明） $\mathcal{E}/A$ の元 $X \longrightarrow A$ と $\mathcal{E}/B$ の元 $Y \longrightarrow B$ をとってきて

$$\mathcal{E}/B\left(\Sigma_f\begin{pmatrix}X\\ \downarrow\\ A\end{pmatrix}, \begin{matrix}Y\\ \downarrow\\ B\end{matrix}\right)\simeq \mathcal{E}/A\left(\begin{matrix}X\\ \downarrow\\ A\end{matrix}, \begin{matrix}f^*Y\\ \downarrow\\ A\end{matrix}\right)$$

なる自然な同形対応をみつければよい．これは図において $\overset{1}{\dashrightarrow}$ と $\overset{2}{\dashrightarrow}$ との間の自然な同形対応のことであると考えてよいから $\begin{matrix}\longrightarrow\\ \downarrow\quad\ \ \downarrow\\ \longrightarrow\end{matrix}$ が p. b. であることから明らかであろう．



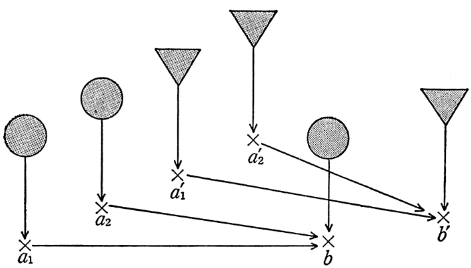

さて先に進む前に Sets において $f^*Y$ がどんなものになっているか考えてみる．今 $Y_b=p^{-1}(b)$ と定義すれば前にいったように $Y \longrightarrow B$ は，$b \in B$ なる $b$ に対して集合 $Y_b$ を対応させる

$$b \longmapsto Y_b$$

なる対応になっている．ちょっと考えてみれば明らかであるが，$f^*Y \longrightarrow A$ は $f(a)=b$ であるときに

$$a \longmapsto (f^*Y)_a$$

なる対応をあたえるものとすると，$Y_b$ と $(f^*Y)_a$ とは全く同じ形をしている．次の図からその大体の様子がわかるであろう．



さて次の定理が大切な定理である.

**定理 8**　$A \xrightarrow{f} B$ をトポス $\mathcal{E}$ の射とすれば, $f^*: \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$ は右随伴関手 $\Pi_f: \mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/B$ をもつ. すなわち

$$\mathcal{E}/A \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad f^* \quad} \\ \perp \\ \xrightarrow[\quad \Pi_f \quad]{} \end{array} \quad \mathcal{E}/B$$

証明)　まず最初に $A \xrightarrow{f} B$ であって, 考える $\mathcal{E}$ の対象がすべて $\mathcal{E}/A$ か $\mathcal{E}/B$ の対象であるから, すべて $\mathcal{E}/B$ の対象である. したがって始めから $\mathcal{E}/B$ を $\mathcal{E}$ だと思えばよいから $B=1$ として一般性を失わない (我々は $\mathcal{E}/B$ がトポスであることを証明した訳ではないが, 以下の証明をみれば $B=1$ として差支えないことがわかる). したがって証明したいことは

$$\mathcal{E}/A\left(f^*\begin{pmatrix} Y \\ \downarrow \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} X \\ \downarrow \\ A \end{matrix}\right) \simeq \mathcal{E}/1\left(\begin{matrix} Y \\ \downarrow \\ 1 \end{matrix}, \Pi_f\begin{pmatrix} X \\ \downarrow \\ A \end{pmatrix}\right)$$

が自然な同形対応になるような $\Pi_f$ を作ることである.

いま $f^*\begin{pmatrix} Y \\ \downarrow \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算すればこれが $A \times Y \xrightarrow{\pi_1} A$ であることが明らかである.

次に右の図によって $\hat{\pi}_1$ を定義する. 実は $\pi_1$ は何からの射であるかによって意味が異なるから $\pi_1$ と単に用いるのは意味不明でいけないのだが, $\pi_1$ はこの証明のなかではこれ以外に出てこないので, ここでは別に混乱の恐れはない.

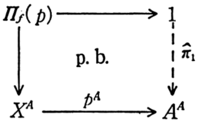
$$\begin{array}{ccc} A \times Y & & \\ {\scriptstyle A \times \hat{\pi}_1} \downarrow & \searrow^{\pi_1} & \\ A \times A^A & \xrightarrow{\ \mathrm{ev}\ } & A \end{array}$$

したがって我々の構成したい自然の同形対応は

$$\mathcal{E}/A\left(\begin{matrix} A \times Y \\ \pi_1 \downarrow \\ A \end{matrix}, \begin{matrix} X \\ \downarrow \\ A \end{matrix}\right) \simeq \mathcal{E}/1\left(\begin{matrix} Y \\ \downarrow \\ 1 \end{matrix}, \Pi_f\begin{pmatrix} X \\ \downarrow \\ A \end{pmatrix}\right)$$

である. いま $X \xrightarrow{p} A$ として求める $\Pi_f(p)$ を次の図の p. b. によって作

る．ここに $p^A$ は $(\ )^A$ が関手であることから $p$ からできる射 $p^A$ のことである．



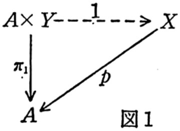




図1

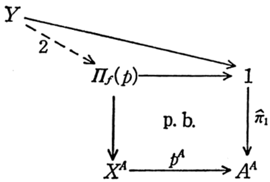



図2

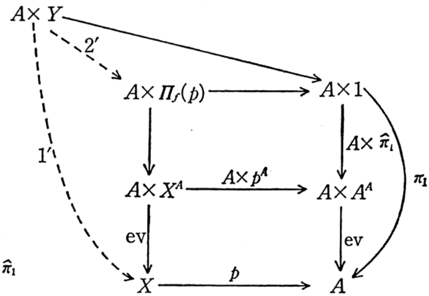
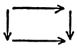



図3

さて我々の証明したいことは $\overset{1}{\dashrightarrow}$ と $\overset{2}{\dashrightarrow}$ との間の自然な同形対応である．

ところで図2の  が p. b. であることから図3の長四角が p. b. であることがわかる．

さらに $\overset{1}{\dashrightarrow}$ と $\overset{1'}{\dashrightarrow}$ とは同じものであり，$\overset{2}{\dashrightarrow}$ と $\overset{2'}{\dashrightarrow}$ との間には自然な同形対応があるから，$\overset{1'}{\dashrightarrow}$ と $\overset{2'}{\dashrightarrow}$ との間に自然な同形対応があることを証明すれば充分である．しかしこれは図3の長四角が p. b. であることから明らかである．細かい点のチェックは演習問題として残しておきたい．

さて $\mathcal{E}$ が Sets のとき $\Pi_f(p)$ は何を意味するのであろうか？　最初に証明で $B=1$ としたことは $B=\bigcup_{b\in B}\{b\}$ と考えてそれぞれの $\{b\}$ について考えてあとで合せて考えればよいことになっている．

いま $p: X\longrightarrow A$ を $p^{-1}(a)=X_a$ とおけば $\{b\}$ の上で考えるということは $\bigcup_{f(a)=b} X_a$ の所だけを考えればよいことを意味している．

$$A_b=\{a\in A|f(a)=b\}$$

とおけば

$$\begin{array}{ccc}
A_b\times\{b\} & & \\
\downarrow{\scriptstyle A_b\times\hat{\pi}_1} & \searrow{\scriptstyle \pi_1} & \\
A_b\times A_b{}^{A_b} & \xrightarrow{\text{ev}} & A_b
\end{array}$$

において $\hat{\pi}_1$ は,

$$\hat{\pi}_1:\ \{b\}\longrightarrow A_b{}^{A_b},$$

$$b\longmapsto \mathrm{id}_{A_b}$$

なる対応になっている．したがって $\{b\}$ の上にだけ全部制限したものを $(\ )_b$ で表わし,

$$X_b=\bigcup_{f(a)=b}X_a$$

とすれば次の図において $(\Pi_f(p))_b$ は次のものとなる.

$$\begin{array}{ccc}
(\Pi_f(p))_b & \longrightarrow & \{b\} \\
\Big| & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\pi}_1} \\
X_b{}^{A_b} & \xrightarrow{(p_b)^{A_b}} & A_b{}^{A_b}
\end{array}$$

$$(\Pi_f(p))_b=\{(g,b)|g:\ X_b\longrightarrow A_b\wedge p_b\circ g=\mathrm{id}_{A_b}\}$$

ところでいま我々は,

$$\begin{array}{ccc}
A_b\times Y_b & \dashrightarrow & X_b \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & \swarrow{\scriptstyle p_b} & \\
A_b & &
\end{array}$$

なる$\dashrightarrow$との関係を考えるのであるから $p_b$ は $A_b$ の上への写像としてよい．このとき明らかに

$$(\Pi_f(p))_b=\prod_{a\in A_b}X_a$$

となっていることがわかる．すなわち

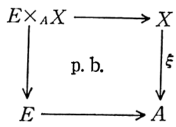
$$\Pi_f(\{a\longmapsto X_a\}_{a\in A})=\{b\longmapsto\prod_{f(a)=b}X_a\}_{b\in B}$$

としてよい.

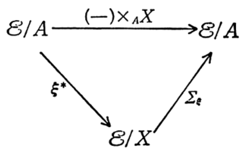
さていよいよ $\mathcal{E}/A$ の巾について考えることにしよう.

4) $\mathcal{E}/A$ の巾

$\xi: X \longrightarrow A$ を $\mathcal{E}/A$ の対象として




によって $(-)\times_A X$ を定義したときに $(-)\times_A X$ の右随伴関手が存在することをいえばよい. ところで右の図は




$$\begin{aligned}&\Sigma_\xi \xi^*(E \longrightarrow A)\\&=\Sigma_\xi(E\times_A X \longrightarrow X)\\&=(E\times_A X \longrightarrow X \xrightarrow{\xi} A)\end{aligned}$$

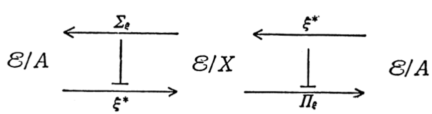
となって可換である. ところで

$$\xi^* \dashv \Pi_\xi, \quad \Sigma_\xi \dashv \xi^*$$

であるから

$$(-)\times_A X = \Sigma_\xi \xi^* \dashv \Pi_\xi \xi^*$$

となって巾の存在がいえた.




以上によって次の定理が証明された.

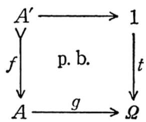
**定理 9** $\mathcal{E}$ をトポス, $A$ をその対象とするとき, $\mathcal{E}/A$ は再びトポスである.

## 3. トポスの簡単な性質

この節ではトポスの簡単な性質をいくつか証明することにする．以下すべてトポス $\mathscr{E}$ のなかで考える．

**定理 10**　$f: A' \rightarrowtail A$ が mono ならば $f$ は equaliser になっている．

証明）　次の図によって $g$ を定義する．




このとき $A' \rightarrowtail A \overset{g}{\underset{\longrightarrow 1 \xrightarrow{t}}{\rightrightarrows}} \Omega$ が $f$ が equaliser である図になっていることをいえばよい．図が可換であることおよび equaliser であることは，丁度 $g$ の定義の図が p. b. であることのいいかえになっている．

**定理 11**　$e: A \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow B$ なる射 $e$ が mono で epi であれば，$A \underset{r}{\overset{e}{\rightleftarrows}} B$ なる $r$ をみつけて

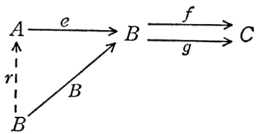
$$r \circ e = \mathrm{id}_A, \quad e \circ r = \mathrm{id}_B$$

であるようにできる．

証明）　定理 10 により $A \xrightarrow{e} B \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} C$ が equaliser になるようにできる．ところで $e$ は epi だから $f=g$ となっている．

したがって右の図が可換になるような $r$ が唯一通り存在する．明らかに

$$e \circ r = \mathrm{id}_B.$$




さて，$e \circ r \circ e = \mathrm{id}_B \circ e = e = e \circ \mathrm{id}_A$．ところで $e$ は mono であるから $r \circ e = \mathrm{id}_A$ がえられた．

**定理 12**　$\mathscr{A} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathscr{B}$ であって $f: B_1 \longrightarrow B_2$ が epi ならば $FB_1 \xrightarrow{Ff} FB_2$ も epi である．

証明）　いま次の図が可換とする．

$$FB_1 \xrightarrow{Ff} FB_2 \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} A$$

証明したいことは $g_1 = g_2$ である.

$F$ と $U$ との間の対応は自然な同形対応だから

$$B_1 \xrightarrow{f} B_2 \underset{Ug_2}{\overset{Ug_1}{\rightrightarrows}} UA$$

が可換となる. $f$ は epi だから $Ug_1 = Ug_2$. 再び $F$ と $U$ との対応が自然な同形対応であることを用いて $g_1 = g_2$ が出てくる.

**定理 13**

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & A & \end{array}$$

が $\mathcal{E}/A$ で epi であれば $X \xrightarrow{f} Y$ は $\mathcal{E}$ でも epi である.

証明) $k: A \longrightarrow 1$ とすれば $\mathcal{E}/A \xrightarrow{\Sigma_k} \mathcal{E}/1 \simeq \mathcal{E}$ となって $\Sigma_k \longrightarrow k^*$ であるから, 定理 12 によって $X \xrightarrow{f} Y$ の epi が出てくる.

**定理 14**

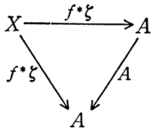
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Z \\ {\scriptstyle \xi}\downarrow & \text{p. b.} & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

が p. b. で $\zeta$ が epi ならば $\xi$ も epi である.

証明) $\zeta$ が epi ならば

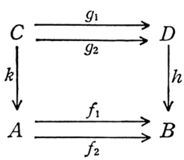
$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\zeta} & B \\ & {\scriptstyle \zeta}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle B} & \\ & B & \end{array}$$

も $\mathcal{E}/B$ で epi となる. ところで $f^*$ は左随伴関手であるから, 定理 12 によって




は $\mathcal{E}/A$ で epi. したがって $\xi=f^*\zeta$ は定理 13 によって $\mathcal{E}$ で epi となる.

**定義**




図が joint pullback であるということを次の二つの条件がみたされていることとする.

**1)**　図が可換である. すなわち

$$hg_1=f_1k \quad \text{で} \quad hg_2=f_2k.$$

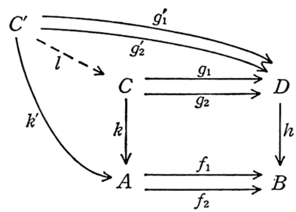
**2)**　右の図において

$$hg_1'=f_1k' \quad \text{で} \quad hg_2'=f_2k'$$

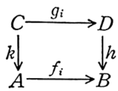
とするとき,

$$g_1'=g_1l,\ \ g_2'=g_2l,\ \ k'=kl$$

となるような $\overset{l}{\dashrightarrow}$ が唯一通り存在する.



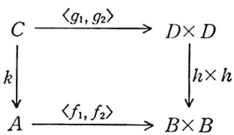

この図のなかの




は普通の意味の p. b. には必ずしもならないから気をつけるべきである.

**定理 15**　joint pullback が必ずつくれる.

証明)



図のような p. b. を作ればそれから上の図のような joint pullback が直ちに作れる.

**定義**

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k_1} & A \\ {\scriptstyle k_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

が pullback であるときに $K \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$ の $\underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightrightarrows}}$ を $f$ の kernel pair であるという.

$K \underset{k_1}{\overset{k_0}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{q} Q$ が完全であるということは $k_0, k_1$ が $q$ の kernel pair であって, $q$ が $k_0, k_1$ の coequaliser であることを意味する.

**定理 16** coequaliser は必ず存在する.

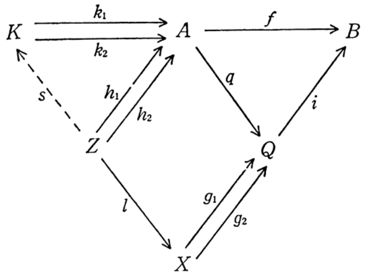
実はこの定理の証明は本書の最後までもちこされる. そこでは直観論理とトポスとの相関関係を用いて証明される. トポスの中だけで証明しようとするとずい分ゴタゴタしなければならない.

歴史的にいうとトポスの定義には最初, 始対象の存在, $A \amalg B$ の存在, それに coequaliser の存在が始めからトポスの公理として入っていたのであるが, あとで他の公理から出ることがわかって取りのけられたものである. しかしながら, これらの存在を初等的に簡単に証明する方法は仲々見当らないようである.

したがってトポスの理論の簡単な展開のためにはこれらをやはり公理として付加えておいた方がよいかも知れないような気がする.

**定理 17** どんな射 $f$ も $f=i\circ q$ で $i$ が mono, $q$ が epi というように分解される. このような分解は同等を除いては一意的に定まる.

証明）




図においてまず $\overset{k_1}{\underset{k_2}{\rightrightarrows}}$ を $f$ の kernel pair として作る．次に $\xrightarrow{q}$ を $\overset{k_1}{\underset{k}{\rightrightarrows}}$ の coequaliser として作る．§1 の equaliser が mono である証明を $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ で繰り返せば，coequaliser が epi である証明がえられるから，$q$ は epi である．

$q$ は $\overset{k_1}{\underset{k_2}{\rightrightarrows}}$ の coequaliser であるから $f=iq$ となる $i$ が唯一通り存在する．

いまこの $i$ が mono であることを証明すれば，$f$ の epi と mono への分解ができた訳である．

これを証明するために図のような $g_1, g_2$ をとって，$ig_1=ig_2$ が成立したとして $g_1=g_2$ を証明すればよい．このため $\overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}}$ の図のような joint pullback を $\overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}}$ とする．このとき図において

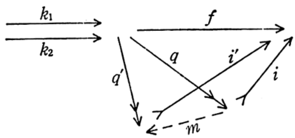
$$fh_1=iqh_1=ig_1l=ig_2l=iqh_2=fh_2.$$

したがって $k_1s=h_1$ で $k_2s=h_2$ となる $s$ が唯一通り存在する．ゆえに

$$g_1l=qh_1=qk_1s=qk_2s=qh_2=g_2l.$$

ところで $l$ は定理 15 によって $q\times q$ から pullback で作られる．ところで $(-)\times A$ も $A\times(-)$ もともに左随伴関手であるから，定理 12 によって epi を保つ．したがって，$l$ も epi となる．ゆえに，$g_1=g_2$ が得られて epi と mono への分解が得られた．

さて $f$ のもう一つの epi と mono への分解 $f=i'\circ q'$ が存在したとする．




このとき $i'q'k_1=i'q'k_2$. ところで $i'$ は mono だから $q'k_1=q'k_2$. したがって, $q'=mq$ なる $m$ が唯一通り存在する.

ところで $q'=mq$ で $q'$ が epi だから, $m$ も epi. また $i$ は唯一通り存在するから $i=i'm$ で $i$ が mono だから $m$ は mono. したがって, $m$ は epi であって mono である. ゆえに定理 11 によって, $m$ の逆が存在する. ゆえに同等を除いて唯一通りであることがわかった.

**定理 18**　すべての射 $f$ は $f=i\circ q$ で $i$ が equaliser, $q$ が coequaliser と分解できる. また, すべての epi な射は coequaliser で, すべての mono の射は equaliser である.

証明）　前定理の証明で $q$ は coequaliser で, $i$ は mono. ところで定理 10 により $i$ は equaliser である. ところで coequaliser は epi であり, equaliser は mono であり, そのような分解は同等を除いて唯一通りであるから, すべての epi は coequaliser で, すべての mono は equaliser となる.

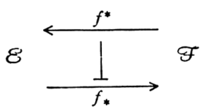
最後に次の重要な概念の定義をあげておく.

**定義**　関手 $F$ が left exact であるとは $F$ が 1, 直積および equaliser を保つことと定義する.

$\mathcal{E},\mathcal{F}$ が二つのトポスであるとき,

$$\mathcal{E}\xrightarrow{f}\mathcal{F}\text{ が geometric morphism である}$$

とは $f$ が $f^*,f_*$ という二つの関手の組であって,



であり，$f^*$ が left exact であることを意味する.

この geometric morphism はトポスの古典的理論，Grothendieck のトポスの理論では単に morphisme de topos と呼ばれるものである．このような入門書では残念ながらこの話題には深入りできないが，例を二つだけあげることにしよう.

まず $\mathcal{E}$ をトポスとして $f\colon A \longrightarrow B$ をその射とするとき $\mathcal{E}/A \xrightarrow{f} \mathcal{E}/B$ を $f^*$ と $f_*=\Pi_f$ とすれば，これは geometric morphism になっている．ここで $f^*$ が left exact であることは $f^*$ が $\Sigma_f$ という左随伴関手をもつことから明らかである（第2章定理 13 参照).

次にもう一つ例をあげよう．$X, Y$ を位相空間，$f\colon X \longrightarrow Y$ を連続とする．このとき

$$\mathrm{Top}(X) \xrightarrow{f} \mathrm{Top}(Y)$$

を $f^*, f_*$ によって定義すれば，$f$ は geometric morphism である．$f^*$ が left exact であることは，キチンと証明してないが別に難しくない．やってみることをお推めする.

# 第4章　直観論理

## 1. はじめに

いま自然数の数列があたえられているものとする．ここで数列というのは

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

のことであるが，この数列が具体的にあたえられているものとする．具体的にという意味は，どんな大きい $n$ をとっても $a_1, a_2, \cdots, a_n$ までが本当にどんな数字になっているかわかっているものとする．例えば

$$3, 4, 8, 5, 7, 6$$

といったたぐいである．

$n$ は任意であるから我々は限りなくこの数列を調べることができる．しかし我々は人間で有限の時間，有限の能力しかもたないから，この数列全部を調べあげる訳には行かない．

いまこの数列のなかで次の性質をもっている特別な数列を考えることにしよう．

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$$

こういう数列を減少数列と呼ぶことにしよう．この減少数列という条件付の数列を考えるということは別に気にする程のことではない．

一般の数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ があたえられたとき

$$a_1, \min(a_1, a_2), \min(a_1, a_2, a_3), \cdots$$

を考えると思えばよい．ここに $\min(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ は $a_1, \cdots, a_n$ のなかの最小の自然数のことであって，勿論 $a_1, \cdots, a_n$ があたえられればそれから簡単に構成することができる．

さて次の易しい定理を考えよう.

**定理** $a_1, a_2, \cdots$ を減少数列とするとき, 充分大きな $n$ をとると $a_n=a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots$ と $a_n$ 以後が全部同じ数になっているようなものが存在する.

もちろんこの定理の証明は難しくない. 最初に $a_1$ をとって $a_1$ より小さい自然数がこの数列のなかに出てくるかを調べて行く. もし出てこなければ $n=1$ とおけばよい. もし $a_1$ より小さい自然数が出てきたとして, これを $b_2$ とおいて $b_2$ より小さい自然数がこの数列のなかに出てくるか調べて行く. もし出てこなければ $b_2$ が出てきた所を $a_n$ として $n$ をとればよい. 出てくればそれを $b_3$ として … と同じことを繰り返せば $a_1, b_2, b_3, \cdots$ の操作を多くとも $a_1+1$ 回繰り返せばその内に $b_k=0$ となってもう調べる必要がなくなるか, または充分先が $b_k$ ばかりだということがわかる筈である.

この証明には非のうちどころがない. しかし多少非人間的な感じがしないでもない. 人間には無限に多くのことを調べつくすことはできないからである. この論理は神様のような超越的な絶対者を暗々裡に想定してできている論理といってよいであろう. 何もそれは悪い訳ではない. 我々の数学は絶対の探求であって, 真理というものがそうしたユルギナキ超越的性格をもったものなのである.

しかしながら, 一方, 我々の人間的能力にマッチしたもっと経験的な論理を作ってそれがどんなものか調べてみるのも面白いではないか?

こういう意味でできたのが直観論理である. まず最初に上の定理で〈$a_n=a_{n+1}=\cdots$ となるような $n$ が存在する〉の存在の意味を経験的にとって‘$n$ を見つける具体的な方法をもっている’と解釈し直すのである. こうすると明らかに上の定理の証明は成立しなくなってしまう. 実際に, 上の定理は直観主義では成立しない定理なのである.

このように直観論理では論理的概念の意味を経験的な内容に変えて考えるのである. 例えば $A\vee B$ ($A$ または $B$) の意味を

$A$ が証明できるかまたは $B$ が証明できるかいずれか一方が成立する

という意味にとるのである. こうすると明らかに

$$A \vee \neg A$$

という排中律は自明なものではなくなってしまう.

本書では直観論理について立ち入った説明は行なわない. もう少し詳しく知りたい人は竹内・八杉共著『数学基礎論』(共立出版) の'有限の立場の論理' の所および, 竹内著『数学基礎論の世界』(日本評論社) の'有限の立場について' の所をよまれたい.

ここでは直観論理の形式的な体系を天下りに導入してそれについて議論して行くことにする.

ところで直観論理は普通の論理の模倣であるから, 普通の論理について常識的なことの理解は直観論理の理解のためにも是非共必要である. 次に普通の論理について常識的なことを一応議論するが, よりよい理解のためには数学基礎論の本をよまれることをお推めする.

慣習に従って, 普通の論理のことを直観論理その他モロモロの新興論理と対比する意味で古典論理と呼ぶが, 古典論理は現代においてももう古いという意味ではないことをハッキリと断っておきたい.

## 2. 古典論理

まず言語についてのべることにする. 言語というものは日本語でもそうであるが, 自分から意識して分析することが難しいものである. このため論理の説明をするときに一番困るのが言語についての説明である.

要するに我々は数学でやっていることを外から眺めて, どのような言語を用いているかを分析しそれをキチンと体系化するだけのことである.

一つの言語 $L$ (language の頭文字) があたえられるとは, 次のものがあたえられることを意味する.

変数　自由変数　$a, b, c, \cdots$

　　　束縛変数　$x, y, z, \cdots$

関数記号　$f, g, h, \cdots$

ここですべての関数記号はその変数の数がいくつかハッキリと決められ

ているものとする.

定まった対象を表わす記号　0, 1, …

これは関数記号で変数の数が0であるものと思ってもよいが，区別するのが普通である．今後定数記号ということにする.

定まった関係を表わす記号　=, <, …, $R$, …

ここですべての記号はその変数の数がいくつかハッキリ決っているものとする．= は特別な意味に用いるのが普通である．すなわち $a=b$ はいつでも‘$a$ と $b$ とが等しい’という意味を表わすものとする．また今後つづめて単に関係記号ということにする.

論理記号　∧, ∨, ⌝, ⟶, ∀, ∃

御存じのことと思うが一通り読み方をいうと，∧は‘そして’，∨は‘または’，⌝は‘でない’，⟶は‘ならば’，∀は‘すべて’，∃は‘存在する’である．⟶は関数や射の記号と混同するので避けたいのであるが，もう一つの記号⊃はまた逆に集合の⊆とも混同しやすいのでここでは⟶をとったが混同しないように気をつけてほしい.

カッコ　(, )

これは結合の順序を示すものである.

一つの言語 $L$ を定めるというのは，上の関数記号はドレダケを用い，そのそれぞれはどれだけの変数の数をもっている，関係記号はドレダケを用いその変数の数はいくつである，定数記号はドレダケを用いるとハッキリ固定することをいう．勿論，ここで言語 $L$ を定めるといっても，実は言語の構成要素を定めただけで，言語が言語であるためには，どんな組合せが単語になるか？　どんな単語の組合せが sentence（文章）になるか？　という文法をハッキリきめなければならない．日常言語の場合は日本語，英語と言語によって文法が変るのであるが，我々の言語では言語のとり方にかかわらず文法は全く同じである．最初に単語（term），次に文章と順々に文法をかいてゆくことにする.

〔term（詳しくいえば言語 $L$ の term)〕

term は次の規則によって作られるものである.

1. 自由変数は term である.
2. 定数記号は term である.
3. $f$ が $i$ 変数の関数記号であって, $t_1, \cdots, t_i$ が term であるとき, $f(t_1, \cdots, t_i)$ もまた term である.
4. term は以上によって作られるものだけである.

さて次に意味のある命題を作ることを考えよう.

〔formula（$L$ の formula)〕

formula は次の規則によって作られるものである.

1. $R$ が $i$ 変数の関係記号で $t_1, \cdots, t_i$ が term であるとき, $R(t_1, \cdots, t_i)$ は formula である.
2. $A$ と $B$ とが formula のとき $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \longrightarrow B$ はすべて formula である.
3. $A(a)$ が formula で $x$ が $A(a)$ に入っていない束縛変数とするとき, $\forall x A(x)$ および $\exists x A(x)$ は formula である.
4. formula は以上によって作られたものだけである.

さて言語 $L$ があたえられてその term や formula を定義したが, これはいわば言葉だけの世界である. この言葉に肉づけするのは次の $L$ の構造 (structure) である.

〔$L$ の構造〕

いま $\mathcal{S}$ が言語 $L$ の構造であるということは, $\mathcal{S}$ が次の構成要素からできていることを意味する.

1. 空でない集合 $S$, この集合は $\mathcal{S}$ の underlying set と呼ばれる.
2. $L$ のすべての定数記号 $c$ に対して, $\bar{c}$ なる $S$ の元が定められている.

3. $L$ の関数記号 $f$ に対して，$\dot{f}: \overbrace{S\times\cdots\times S}^{i\text{個}} \longrightarrow S$ なる関数 $\dot{f}$ が対応させられている．ここに $i$ は $f$ の変数の数である．

4. $L$ の関係記号 $R$ に対して，$\bar{R}\subseteq\overbrace{S\times\cdots\times S}^{i\text{個}}$ なる $\bar{R}$ が対応させられている．但し $=$ に対しては $\{(s, s)|s\in S\}$ なる集合が対応しているものとする．

いま $L$ の構造 $\mathcal{S}$ があたえられると，$L$ の言葉が意味をもってくる．これを説明しよう．いま $A$ を $L$ の formula とする．$A$ に自由変数が一つも入っていないときに $A$ を $L$ の sentence という．$A$ が sentence のときに $A$ が $\mathcal{S}$ の上で真か偽かを定義しようというのである．ここで $A$ が一般の formula ではなくて sentence でなければならないのは，$A$ が $A(a)$ の形で $a$ が自由変数のときは，$A(a)$ が $\mathcal{S}$ の上で真か偽かは，$a$ として $S$ のどんな元をとるかに依存して一意的にきまらないからである．

以下に 'sentence $A$ が $\mathcal{S}$ で成立する' ということを

$$\mathcal{S}\models A$$

の記号で表わすことにする．

さてこの定義をする前に言語 $L$ を $\mathcal{S}$ に都合のよいように拡大することを考えよう．$S$ のすべての元 $s$ に対して $c_s$ なる定数記号を $L$ に導入して拡大するのである．我々はこうして拡大された言語を $L(\mathcal{S})$ とかくことにして，$L(\mathcal{S})$ の言葉の $\mathcal{S}$ の上の意味づけをすることにする．まず最初に term で自由変数の入っていないものを closed term と呼ぶことにして，$L(\mathcal{S})$ の closed term の $\mathcal{S}$ の上での意味づけをすることにする．

〔closed term $t$ の $\mathcal{S}$ の上での意味づけ〕

いま $L(\mathcal{S})$ の closed term $t$ をとって $t[\mathcal{S}]$ という $S$ の元を次のように順々に定義してゆく．

1) $t$ が $c_s$ の形のとき，$t[\mathcal{S}]$ は $s$ であると定義する．

2) $t$ が定数記号 $c$ であって $c$ が $c_s$ の形でないときには $t[\mathcal{S}]$ を $\bar{c}$ であると定義する．

3) $t$ が $f(t_1, \cdots, t_i)$ の形であって, $s_1=t_1[\mathcal{S}], \cdots, s_i=t_i[\mathcal{S}]$ が既に定義されているとする．このとき $t[\mathcal{S}]$ を $\bar{f}(s_1, \cdots, s_i)$ と定義する．

以上によってすべての $L(\mathcal{S})$ の closed term に対して $t[\mathcal{S}]$ が $S$ の元として定義されることは明らかであろう．

次にいよいよ $A$ を $L(\mathcal{S})$ の sentence であるとして $\mathcal{S}\models A$ の定義をすることにする．これも次のように順々に行なってゆく．

1) $A$ が $R(t_1, \cdots, t_i)$ の形であるとする．このとき $A$ が sentence だから $t_1, \cdots, t_i$ は closed term で $t_1[\mathcal{S}], \cdots, t_i[\mathcal{S}]$ は定義されている．これらをそれぞれ $s_1, \cdots, s_i$ としよう．このとき，

$$\mathcal{S}\models A \Leftrightarrow (s_1, \cdots, s_i) \in \bar{R}$$

と定義する．

特に $R(t_1, t_2)$ が $t_1=t_2$ であるときには，

$$\mathcal{S}\models (t_1=t_2) \Leftrightarrow s_1=s_2$$

と定義する．

2) $A$ が $\neg B$ の形であるとき，

$$\mathcal{S}\models A \Leftrightarrow (\mathcal{S}\models B \text{ が成立しない})$$

と定義する．

3) $A$ が $B\wedge C$ のとき，

$$\mathcal{S}\models A \Leftrightarrow (\mathcal{S}\models B \text{ であって } \mathcal{S}\models C)$$

と定義する．

4) $A$ が $B\vee C$ のとき，

$$\mathcal{S}\models A \Leftrightarrow (\mathcal{S}\models B \text{ であるか，または } \mathcal{S}\models C)$$

と定義する．

5) $A$ が $B \longrightarrow C$ のとき，

$$S\models A \Leftrightarrow (\mathcal{S}\models B \text{ でないか，または } \mathcal{S}\models C)$$

と定義する．

6) $A$ が $\forall x B(x)$ のとき，

$$\mathcal{S}\models A \Leftrightarrow (\text{すべての } S \text{ の元 } s \text{ に対して } \mathcal{S}\models B(c_s))$$

と定義する.

7) $A$ が $\exists x B(x)$ のとき,

$$\mathscr{S} \models A \Leftrightarrow (\text{ある } S \text{ の元 } s \text{ が存在して } \mathscr{S} \models B(c_s))$$

と定義する.

以上によって $\mathscr{S} \models A$ の定義が完了するのである. これは具体的な $L$ の sentence $A$ をとれば順々に記号の数の少ないものの定義に還元されて行くことから, $\mathscr{S} \models A$ が成立しているか成立していないかが唯一通りに決まることは明らかであろう.

以上の定義をみれば明らかであろうが $\mathscr{S} \models$ の意味は一言にいって

$c$ の $\mathscr{S}$ での意味は $\bar{c}$,

$c_s$ の $\mathscr{S}$ での意味は $s$,

$f$ の $\mathscr{S}$ での意味は $\bar{f}$,

$R$ の $\mathscr{S}$ での意味は $\bar{R}$,

$\neg$ の ($\mathscr{S}$ での) 意味は‘でない’,

$\wedge$ の ($\mathscr{S}$ での) の意味は‘そして’,

$\vee$ の ($\mathscr{S}$ での) 意味は‘または’,

$\longrightarrow$ の ($\mathscr{S}$ での) 意味は‘ならば’,

$\forall$ の ($\mathscr{S}$ での) 意味は‘すべて’,

$\exists$ の ($\mathscr{S}$ での) 意味は‘存在する’

と当り前のことをいってるだけである. ここで ($\mathscr{S}$ での) とカッコした所は $\mathscr{S}$ によらない共通の定義の仕方であるからである.

それならばどうして, こういう当り前のことをやって, 一方でかいたものをもう一度言い直して意味づけをするのであろうか? その意味はこうすることによって言葉と意味というものをハッキリ区別することによって万事考え易く明瞭になるということなのである.

一言でいえば外から眺めて分析するときに, 言葉と意味というようなゴッチャになり易いものをハッキリと分けて考えるということが何より必要な大切なことなのである.

さて言語 $L$ を一つきめて $A$ をその sentence とする．$L$ の構造 $\mathscr{S}$ をいろいろとると，$A$ は $\mathscr{S}$ の上で成立したり，しなかったりするであろう．すなわち一般には $\mathscr{S}$ のとり方によるであろう．しかしなかには $\forall x(x=x)$ のようにどんな $\mathscr{S}$ をとろうとも $\mathscr{S}$ によらずに常に成立する $A$ もあるだろう．逆に，$B\wedge\neg B$ のようにどんな $\mathscr{S}$ をとっても絶対に成立しない sentence もあるであろう．

どんな $\mathscr{S}$ をとっても成立する sentence は，実は，論理的に証明できる sentence になっている．この性質を定理の形にキチンと表現するためにまず論理的に証明できる formula という概念を定義しよう．このため我々は証明図という概念を定義することにする．

まず順々にやって行くことにして式をとりあげる．

〔式（$L$ の式)〕

$A_1, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_n$ が formula のとき，

$$A_1, \cdots, A_m \Longrightarrow B_1, \cdots, B_n$$

の形を式という．

ここで $\Longrightarrow$ なる新しい記号を導入するが，これは以下の証明図を定義するために便利なため導入したもので，

$A_1, \cdots, A_m \Longrightarrow B_1, \cdots, B_n$ の内容的な意味は $A_1\wedge\cdots\wedge A_m \longrightarrow B_1\vee\cdots\vee B_n$ である．但しこの式においては $m=0$ であってもよいし，$n=0$ であってもよい．特別な場合として

$$A_1, \cdots, A_m \Longrightarrow$$

は‘$A_1, \cdots, A_m$ から矛盾が生ずる’と読むし，

$$\Longrightarrow B_1, \cdots, B_n$$

は‘$B_1$ か $B_2$ か … $B_n$ のいずれかが成立する’と読む．もちろん $B_1\vee\cdots\vee B_n$ と同等の意味である．

特別な場合として

$$\Longrightarrow$$

自身も式であって，これは‘何んの仮定なしに矛盾が生ずる’ということだ

から単に‘矛盾’を意味する．我々の論理体系で $\Longrightarrow$ が証明されては困る訳である．

さて以下にこのように $A_1, \cdots, A_n$ と有限個の formula のコンマでくぎった列がよく現われるので，このようなものを一般に $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda, \cdots$，などのギリシャ大文字で表わすことにしよう．ここに $n=0$ でもよい．したがってこの $\Gamma, \Delta, \cdots$ は空の列を意味するかも知れない．

さて我々はまず最初に，$L$ に $=$ が入っていない場合の論理の推論の，Gentzen による形式化をのべることにする．

我々の論理の推論は最初は必ず次の形の式から出発する．

$$D \Longrightarrow D$$

ここに $D$ はどんな formula でも構わない．

このあと論理的に証明できたものからその論理的推論を繰り返して得られたものが論理的に証明できるもののすべてである．

推論はすべて $S, S_1, S_2$ を式として，

$$\frac{S_1}{S_2} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \ S_2}{S}$$

の形でそれぞれ‘$S_1$ から $S_2$ が推論される’または‘$S_1$ と $S_2$ から $S$ が推論される’と読む．

ここに $A_1, \cdots, A_m \Longrightarrow B_1, \cdots, B_n$ で $A_1, \cdots, A_m$ を仮定といい，$B_1, \cdots, B_n$ を結論の場合分けという．$\Gamma \Longrightarrow B_1, B_2$ は $\Gamma$ という仮定から $B_1$ の場合と $B_2$ の場合とがあり得ることを意味している．

〔推論図〕

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 増 | 左 | $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{D, \Gamma \Longrightarrow \Delta}$ | 右 | $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, D}$ |
| 換 | 左 | $\dfrac{\Gamma, C, D, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, D, C, \Pi \Longrightarrow \Delta}$ | 右 | $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, C, D, \Lambda}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, D, C, \Lambda}$ |
| 減 | 左 | $\dfrac{\Gamma, D, D, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, D, \Pi \Longrightarrow \Delta}$ | 右 | $\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, D, D, \Lambda}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, D, \Lambda}$ |

この上の六個の推論図は全部で，式において仮定の formula の順序や結論の場合分けの順序はどうでもよいこと，および，仮定をふやすことは式全体を弱めるだけなこと，および，結論の場合をふやすことは（…その他のこういう場合もあるかも知れないと）やはり式全体を弱めるだけなことを意味している．

〔三段論法〕

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D \qquad D, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

この一番典型的な特別な場合は

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

である．

$\urcorner$　左 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D}{\urcorner D, \Gamma \Rightarrow \Delta}$　　右 $\dfrac{D, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \urcorner D}$

これが色々の場合にどんな推論になっているかはやってみると一寸面白い．

$\wedge$　左 $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$

および $\dfrac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$\vee$　左 $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$

および $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$

$\longrightarrow$　左 $\dfrac{\Pi \Rightarrow \Lambda, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \longrightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}$　　右 $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \longrightarrow B}$

$\forall$　左 $\dfrac{A(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A(x)}$

$t$ は任意の term である．

ここに $a$ は下の式には入っていない．この $a$ をこの $\forall$ 右の eigen-variable という．

∃　左 $\dfrac{A(a), \Gamma \longrightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \longrightarrow \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, A(t)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \exists x A(x)}$

ここで $a$ は下の式には入っていないとする. ∀右と同様, この $a$ は∃左のeigenvariableと呼ばれる.

$t$ は任意の term である.

以上が推論図の全部である. 別に必要がある訳ではないが, Gentzen の有名な基本定理は次のものである.

**基本定理**　$\Gamma \Longrightarrow \Delta$ が証明できるならば三段論法を用いないでできる.

基本定理その他証明図について興味のある人は前述の竹内・八杉著『数学基礎論』(共立) をみられたい.

さて上の証明の形式化は $L$ に $=$ が入っているときは具合が悪い. 例えば $a=b \Longrightarrow b=a$ というような当然証明されるべき式が証明されないからである. したがって, $L$ に $=$ が入るときは次のように変更する.

我々は出発点は $D \Longrightarrow D$ の形だけではなくて次のような四つの形のものでもよいとする.

1)　$\Longrightarrow t=t.$

2)　$s=t \Longrightarrow t=s.$

3)　$s_1=s_2, s_2=s_3 \Longrightarrow s_1=s_3.$

4)　$s=t, A(s) \Longrightarrow A(t).$

ここに $s, t, s_1, s_2, s_3$ は任意の term であるとする.

さて $\Longrightarrow A$ が証明できるときに, 単に '$A$ が証明できる' という. 次の定理が上にのべた $\mathscr{A} \models$ と証明との関係である.

**完全性定理** (ゲーデル)　$A$ が $L$ の sentence であるとき, どんな $L$ の構造 $\mathscr{A}$ をとっても $\mathscr{A} \models A$ である必要十分条件は $A$ が証明できることである.

さてここで我々がやったことを直観論理で考えるとどうなるであろうか？それを次節から考えることにしたい．

## 3. 直観論理の証明

さて言語 $L$ を前と同じく固定する．このとき直観論理の証明は，前の古典論理の式の概念を次のようにちょっと変形することによって得られる．

古典論理の式 $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ が直観論理の式であるということを $\Delta$ が空か唯一つの formula からできていることとする．すなわち，直観論理の式は $\Gamma \Longrightarrow A$ の形であるか，または $\Gamma \Longrightarrow$ なる形なのである．このように式を変形すると古典論理の証明の概念はそのまま直観論理で成立する．これはいかにも不思議に思えるがそれ程不思議なことではない．前にもいったように直観論理における一番根本的な改定は，排中律 $A \vee \neg A$ が成立しないということであり，その他の変化はこの変化に順応してできた変化と思ってもよいのである．ところで $A \vee \neg A$ は $A$ か $A$ でないか？　と場合に分ける，場合分けの原理である．ところで $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ の $\Delta$ の所は場合に分ける所である．したがってここを一個か空かに制限するということは，場合分けの原則を拒否することになって，丁度直観論理が成立するのである．

さて我々は，直観論理の推論は上の制限のもとで古典論理と同じであるといったが，直観論理がここの主題であるから上の制限をつけた形でもう一度全部繰返してみることにする．時々上の制限によってすっかり異なった形にみえる所があるから気をつけて見てほしい．

〔直観論理の推論図〕

増　左　$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{D, \Gamma \Longrightarrow \Delta}$　　右　$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow}{\Gamma \Longrightarrow D}$

換　左　$\dfrac{\Gamma, C, D, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, D, C, \Pi \Longrightarrow \Delta}$　　右　ナシ

減　左　$\dfrac{\Gamma, D, D, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, D, \Pi \Longrightarrow \Delta}$　　右　ナシ

〔三段論法〕

$$\frac{\Gamma \Rightarrow D \qquad D, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Lambda}$$

7 左 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow D}{7D, \Gamma \Rightarrow}$ 右 $\dfrac{D, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 7D}$

∧ 左 $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ 右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$

および $\dfrac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

∨ 左 $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ 右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$

および $\dfrac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$

⟶ 左 $\dfrac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Pi \Rightarrow A}{A \longrightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta}$ 右 $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \longrightarrow B}$

∀ 左 $\dfrac{A(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}$ 右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x)}$

$t$ は任意の term.

$a$ は下式にはない. $a$ をこの推論の eigenvariable という.

∃ 左 $\dfrac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}$ 右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x A(x)}$

$a$ は下式にはない. $a$ をこの推論の eigenvariabla という.

$t$ は任意の term.

さていい忘れたかも知れないが, 直観論理でも最初に出発する式は = のない場合もある場合も全く古典論理と同じである. また, Gentzenの基本定理も同様に成立する. ただ上の推論図で $\Delta$ および $\Lambda$ は空か唯一個の formula からできていることが大切なことである.

さて直観論理と位相空間との関係についてのべるために, 上のスタンダー

ドな言語とは全然変った言語を考えることにする．ここではこれを $O$- 言語と呼ぶことにする．一つの $O$- 言語 $\mathcal{O}$ をあたえるということは素式とよばれる，$P, Q, \cdots$ なるいくつかの（無限にあってよい）文字をあたえることである．

次に $\mathcal{O}$ の formula を次のように定義する．

1） 素式は formula である．

2） $A$ と $B$ が formula のとき $\neg A$ と $A \longrightarrow B$ はまた formula である．

3） いま $I$ が集合で，$i \in I$ なるすべての $i$ について $A_i$ が formula のとき，$\bigwedge_{i \in I} A_i$ と $\bigvee_{i \in I} A_i$ は共に formula である．

4） 以上によってできたもののみが formula である．

ここでちょっと説明すると $\bigwedge_{i \in I} A_i$ および $\bigvee_{i \in I} A_i$ は一つの新しい図形だと思うのである．$I$ は無限集合でもよいとするので図形とは考え難いが，$\{A_i | i \in I\}$ というように厳密には集合と $\wedge$ または $\vee$ とが組合さってできている何かだと思えばよい．もっとウルサクいえば（$\vee, \{A_i | i \in I\}$）および（$\wedge, \{A_i | i \in I\}$）という集合だと思えばよい．次に $\mathcal{O}$ の式をやはり

$$\Gamma \Longrightarrow \Delta$$

という形にして，$\Delta$ は前と同じく空であるかまたは1個だけの formula からできているものとするが，$\Gamma$ の方は今度は無限に多くの formula でもよいものとする．

もっと詳しくいえば，$\Gamma$ は formula の整列集合と思うか，または順序はどうでもよくて単なる formula の集合と思うかである．取扱いはどちらでも構わない．

このとき $O$- 言語の証明というものを，やはり始めは

$$D \Longrightarrow D$$

から出発するが推論は次のようなものとする．

〔式の構造についての推論〕

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Pi \Longrightarrow \Delta}$$

ここに $\Gamma$ に含まれている formula はすべて $\Pi$ に含まれているものとする.

〔三段論法〕

$$\frac{\Gamma_0 \Rightarrow D_0 \quad \Gamma_1 \Rightarrow D_1 \ \cdots \ \Gamma_\alpha \Rightarrow D_\alpha \ \cdots \qquad D_0, D_1, \cdots, D_\alpha, \cdots, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_\alpha, \cdots, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$\neg$　左 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow D}{\neg D, \Gamma \Rightarrow}$　　右 $\dfrac{D, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg D}$

$\longrightarrow$　左 $\dfrac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Pi \Rightarrow A}{A \longrightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta}$　　右 $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \longrightarrow B}$

$\wedge$　左 $\dfrac{\cdots, A_i, \cdots_{i \in I}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\bigwedge_{i \in I} A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A_i \qquad \text{すべての } i \in I \text{ について}}{\Gamma \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} A_i}$

ここに $\cdots, A_i, \cdots_{i \in I}$ は $\Gamma$ のすべての元 $i$ について, $A_i$ が並んでいることを意味する. 例えば, $I = \{1, 2, \cdots\}$ のときは, $\cdots, A_i, \cdots_{i \in I}$ は $A_1, A_2, A_3, \cdots$ のことである.

$\vee$　左 $\dfrac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \text{すべての } i \text{ について}}{\bigvee_{i \in I} A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

右 $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A_{i_0}}{\Gamma \Rightarrow \bigvee_{i \in I} A_i}$

ここに $i_0 \in I$ とする.

さて $X$ を位相空間とする. このとき $\mathcal{S}$ が $O$- 言語 $\mathcal{O}$ の構造であるということは,

$\mathcal{S}$ は任意の $\mathcal{O}$ の素式 $P$ に $\bar{P}$ なる $X$ の開集合を対応させる対応になっていること

をいう.

いま $\mathcal{O}$ の formula $A$ を任意にとるとき, $A$ の $\mathcal{S}$ の上の値を次のように定義して, これを $[A]_{\mathcal{S}}$, または略して $[A]$ とかくことにする. $[A]$ は常に $X$ の開集合になっている.

1) $A$ が $\mathcal{O}$ の素式 $P$ であるときは,

$$[A]=\bar{P}$$

と定義する.

2)　$A$ が $\neg B$ のときは,

$$[A]=(X-[B])^{\circ}$$

と定義する.

ここに − は集合の差の − であり, $S^{\circ}$ は $S$ に含まれる最大の開集合を意味するものとする.

3)　$A$ が $B\longrightarrow C$ のときは,

$$[A]=((X-[B])\cup[C])^{\circ}.$$

4)　$A$ が $\bigwedge_{i\in I}B_i$ のときは,

$$[A]=(\bigcap_{i\in I}[B_i])^{\circ}$$

と定義する.

5)　$A$ が $\bigvee_{i\in I}B_i$ のときは

$$[A]=\bigcup_{i\in I}[B_i]$$

と定義する.

以上で $[A]$ の定義は完結した.

さて我々は '$A$ が $\mathcal{S}$ で成立している' ということを $\mathcal{S}\models A$ とかいて次の式で定義する.

$$\mathcal{S}\models A \Leftrightarrow [A]=X.$$

さて我々は次の定理を証明することにする.

**定理 1**　$A$ が証明可能ならば, すべての $\mathcal{O}$ の構造 $\mathcal{S}$ に対して次のことが成立する.

$$\mathcal{S}\models A,\ \text{すなわち}\ \ [A]=X.$$

証明)　この証明を次の形で行う.

$\Gamma\Longrightarrow\Delta$ が証明可能ならば $[\Gamma]\subseteq[\Delta]$. ここで $[\Gamma]=(\bigcap_{A\in\Gamma}[A])^{\circ}$ で定義する. ここでちょっと妙なことが起る. これは次のことである.

$\Delta$ が空のとき $[\Delta]=\phi$ と定義する.

$\Gamma$ が空のとき $[\Gamma]=X$ と定義する.

すなわち $\Longrightarrow$ の前に $\Phi$ がくるかあとにくるかによって, $\Phi$ が空のときに $[\Phi]$ の定義を全く正反対にするのである. ちょっとみると変な気がするが実はこれでよいのである. $\Longrightarrow$ の左側は $\wedge$ の方で, 右側は $\vee$ の方であるからこれは当然なのである.

さて $D \Longrightarrow D$ については $[D] \subseteq [D]$ は明らかであるから, あとは推論図の上式では定理が成立しているとして, 推論図の下式にも成立していることを順々に調べてゆけばよい.

1) 式の構造についての推論

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Pi \Longrightarrow \Delta}$$

ここに $\Gamma$ のすべての formula は $\Pi$ のなかに入っている.

我々の仮定は $[\Gamma] \subseteq [\Delta]$ であって証明すべきことは $[\Pi] \subseteq [\Delta]$ である. ところで $\Gamma$ のすべての formula は $\Pi$ のなかに入っているから $[\Pi] \subseteq [\Gamma]$ となるから明らかである.

2) 三段論法

$$\frac{\Gamma_i \Longrightarrow A_i (i \in I) \qquad \cdots, A_i, \cdots_{i \in I}, \Pi \Longrightarrow \Delta}{\cdots, \Gamma_i, \cdots_{i \in I}, \Pi \Longrightarrow \Delta}$$

仮定は二つあって, すべての $i \in I$ について

$$(\bigcap_{C \in \Gamma_i} [C])^\circ \subseteq [A_i] \quad と \quad (\bigcap_{i \in I} [A_i] \cap \bigcap_{B \in \Pi} [B])^\circ \subseteq [\Delta]$$

であって, 証明したいことは

$$(\bigcap_{i \in I} \bigcap_{C \in \Gamma_i} [C] \cap \bigcap_{B \in \Pi} [B])^\circ \subseteq [\Delta]$$

である. したがって適当に $E_i, F$ なる $X$ の部分集合と $U_i, V$ なる開集合をとれば

$$\forall i \in I \quad (E_i)^\circ \subseteq U_i \quad と \quad (\bigcap_{i \in I} U_i \cap F)^\circ \subseteq V$$

から $(\bigcap_{i \in I} E_i \cap F)^\circ \subseteq V$ を導けばよい.

いま $(\bigcap_{i \in I} E_i \cap F)^\circ = W$ とおけば, $W \subseteq F$ で, $W \subseteq E_i$ である. $W$ は開集合だから $W \subseteq (E_i)^\circ \subseteq U_i$, したがって, $W \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i$. ゆえに $W \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i \cap F$.

また $W$ が開集合のことを用いれば，$W\subseteq(\bigcap_{i\in I}U_i\cap F)^\circ\subseteq V$ となって求める $W\subseteq V$ が得られた．

3) ７の左と右

上のようなおきかえを行なうと，これは次の二つの推論に相当している．但し，$U, V$ は開集合

$$\frac{U\subseteq V}{(X-V)^\circ\cap U=\phi}\qquad\qquad \frac{V\cap U=\phi}{U\subseteq(X-V)^\circ}$$

左の方は当り前で右の方は $U\subseteq(X-V)$ としてから $U$ が開集合のことを利用して $(X-V)$ に $^\circ$ をつければよい．

4) $\longrightarrow$ の左と右

$U, V, U_1, U_2, U_3, V_1, V_2$ を開集合として

$$\frac{V_1\cap U_1\subseteq U_2\qquad U_3\subseteq V_2}{((X-V_2)\cup V_1)^\circ\cap U_1\cap U_3\subseteq U_2}\qquad\qquad \frac{V\cap U_1\subseteq U}{U_1\subseteq((X-V)\cup U)^\circ}$$

を証明すればよい．左の方は当り前だし，右の方は 3) の右の方と同様にすればよい．

5) ∧の左と右

適当に開集合 $U_i, U, V$ をえらべば次の形になる．

$$\frac{(\bigcap_{i\in I}U_i\cap V)^\circ\subseteq U}{(\bigcap_{i\in I}U_i)^\circ\cap V\subseteq U}\qquad\qquad \frac{\text{すべての } i\in I \text{ について } V\subseteq U_i}{V\subseteq(\bigcap_{i\in I}U_i)^\circ}$$

いずれも明らかであろう．

6) ∨の左と右

適当に開集合 $U_i, V, W, U_{i_0}$ をとって次の形のものを証明すればよい．

$$\frac{\text{すべての } i\in I \text{ について } U_i\cap V\subseteq W}{(\bigcup_{i\in I}U_i)\cap V\subseteq W}\qquad\qquad \frac{V\subseteq U_{i_0}}{V\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i}$$

両方とも明らかであろう．

この定理の逆，すなわちどんな $\mathcal{O}$ の構造 $\mathcal{S}$ をとっても $[A]_{\mathcal{S}}=X$ ならば $A$ が証明できることも証明されているが，ここでは省略することにする．

しかしこの関係が直観論理と位相空間の間の相互関係のキイポイントになっている．

## 4. 位相空間 $X$ の上の構造

第1章での層についての議論をまず思い出して頂くと今からやることには便利である．

ここでは位相空間 $X$ を一つ固定して，$X$ の上のいろいろの層を同時にとり扱う．そのため $\mathscr{A}$ を層の集合とする．すなわち

$$\mathscr{A} \ni A, B, C, \cdots$$

としたとき $A, B, C, \cdots$ は $X$ の上の層である．

**定義**　$R$ が $\mathscr{A}$ の上の関係であるとは，$R$ が次の条件をみたすことをいう．

$\mathscr{A}$ の元 $A_1, \cdots, A_n$ が定まっており，$R$ は $R\colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow \mathfrak{O}(X)$ なる関数で次の条件をみたすものである．

$$R(a_1, \cdots, a_n) \cap U = R(a_1 \urcorner U, \cdots, a_n \urcorner U) \cap U.$$

ここに $a_i \in A_i$ $(i=1, \cdots, n)$ で，$U \in \mathfrak{O}(X)$ とする．

$R$ が $\mathscr{A}$ の上の上のような関係であるとき，$\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ を $R$ のタイプといって $\mathrm{typ}(R)$ で表わす．

**定義**　$F$ が $\mathscr{A}$ の上の演算であるということは $F$ が次の性質をみたすことをいう．

$\mathscr{A}$ の元 $A_1, \cdots, A_n, A$ が存在して，$F$ は

$$F\colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A$$

なる関数で次の条件をみたしている．

$$F(a_1, \cdots, a_n) \urcorner U = F(a_1 \urcorner U, \cdots, a_n \urcorner U) \urcorner U.$$

ここに $a_i \in A_i$ $(i=1, \cdots, n)$ で $U \in \mathfrak{O}(X)$ である．

このとき $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ と $A$ の組を $F$ のタイプをいって $\mathrm{typ}(F)$ と表わす．特に $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ を $F$ の変数のタイプ，$A$ を $F$ の値のタイプという．

いま，今までやってきたこととは離れてタイプの集合 $\mathscr{T}$ を考える．この

とき $L$ が $\mathcal{T}$- 言語であるということを次のように定義する．

$L$ は次の構成要素からできている．

1)　自由変数

すべての $\mathcal{T}$ の元 $A$ に対して，$A$ の元を表わす自由変数 $a, b, c, \cdots$ があたえられている．$A$ を $a$ のタイプといって $\mathrm{typ}(a)$ で表わす．$a$ のタイプが $A$ であることをハッキリ表わすために $a: A$ とかくこともある．

2)　束縛変数

すべての $\mathcal{T}$ の元 $A$ に対して，$A$ の元を表わす束縛変数 $x, y, z, \cdots$ があたえられている．

$\mathrm{typ}(x), x: A$ は自由変数のときと同じように定義される．

3)　定数記号

定数記号 $c$ があたえられたときは，$c$ のタイプが必ず $\mathcal{T}$ の元の中にきまっているものとする．$\mathrm{typ}(c)=A$ のときは $c$ は $A$ のある元を表わすものである．

4)　関数記号

関数記号 $F$ があたえられたとき，そのタイプが $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ と $A$ の組としてあたえられているものとする．前と同様 $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ を $F$ の変数のタイプ，$A$ を $F$ の値のタイプという．$F$ のタイプを $\mathrm{typ}(F)$ で表わす．

5)　関係記号

関係記号 $R$ があたえられたとき，そのタイプが $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ としてあたえられているものとする．$R$ のタイプを $\mathrm{typ}(R)$ で表わす．

$\mathcal{T}$ のすべての元 $A$ についてタイプが $\langle A, A \rangle$ であるような特別な関係記号 $\overset{A}{=}$ を必ず入れておく．普通 $A$ を省略して $=$ とかくことにする．

更にすべての $\mathcal{T}$ の元 $A$ に対してそのタイプが $\langle A \rangle$ であるような特別な関係記号 $E^A$ を入れておく．普通 $A$ を省略して $E$ とかく．

$\mathcal{T}$- 言語 $L$ を一つ決めるためには，実際には $L$ にどんな定数記号と関数

記号が入っているかを決めればよい.

いま $\mathcal{T}$- 言語 $L$ があたえられたとして $L$ の term および $L$ の formula を定義することにする.

〔term ($L$ の term)〕

term は次の規則によって作られるものである.

1) 自由変数および定数記号は term である. このときこの term のタイプをそれぞれ自由変数のタイプ, および定数記号のタイプによって定義する.

2) $F$ が関数記号で, その変数のタイプが $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ で, $t_1, \cdots, t_n$ が各々そのタイプが $A_1, \cdots, A_n$ であるような term であるとき, $F(t_1, \cdots, t_n)$ もまた term であって, そのタイプは $F$ の値のタイプであると定義する.

3) 以上によってできたものだけが term である.

〔formula ($L$ の formula)〕

formula は次の規則によって作られる.

1) $R$ が関係記号で, そのタイプが $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ で, $t_1, \cdots, t_n$ がそれぞれそのタイプが $A_1, \cdots, A_n$ であるような term とするとき, $R(t_1, \cdots, t_n)$ は formula である.

2) $\varphi$ と $\psi$ とが formula のとき, $\neg\varphi, \varphi\wedge\psi, \varphi\vee\psi, \varphi\longrightarrow\psi$ はすべて formula である.

3) $\varphi(a)$ が formula で, $x$ が $\varphi(a)$ に入っていない束縛変数で, $x$ のタイプと $a$ のタイプとが等しいとき, $\forall x\varphi(x)$ と $\exists x\varphi(x)$ はまた formula である.

4) 以上によってできるものだけが formula である.

次に $\mathcal{T}$- 言語 $L$ と $X$ の上の層の集合 $\mathcal{A}$ があたえられたとき, $\mathcal{S}$ が $L$ の $\mathcal{A}$- 構造であるということを次のことと定義しよう.

0) $\mathcal{T}$ のタイプと $\mathcal{A}$ の層との間に一対一の対応がつけられている. した

がって $\mathcal{T}$ のタイプとそれに対応する $\mathcal{A}$ の層とを同じ記号で表わすことにする．また以下においては同一視する．すなわち $\mathcal{T}$ のタイプは $\mathcal{A}$ の層であるとも考える．

1）$L$ の任意の定数記号 $c$ に対して，それに対応する $A$ の元 $\bar{c}$ が定められている．ここに $A$ は $c$ のタイプとする．

2）$L$ の任意の関数記号 $F$ に対して，それに対応する $\mathcal{A}$ の上の演算 $\bar{F}$ がきめられている．ここに $F$ のタイプと $\bar{F}$ のタイプとは等しいものとする．

3）$L$ の任意の関係記号 $R$ に対して，それに対応する $\mathcal{A}$ の上の関係 $\bar{R}$ がきめられている．ここに $R$ のタイプと $\bar{R}$ のタイプとは等しいものとする．更に $R$ が $=$ であるときは対応する関係も普通の意味の $=$ であるとする．また $R$ が $E^A$ であるときは対応する関係は $\langle A, \mathrm{E}, \neg\rangle$ で層を定義したときの $\mathrm{E}$ であるとする．

すなわち $L$ が $c, \cdots, F, \cdots, R, \cdots$ のとき $\mathcal{S}$ は $\bar{c}, \cdots, \bar{F}, \cdots, \bar{R}, \cdots$ によってあたえられていると思えばよい．

以下に $L$ の sentence $\varphi$ に対して $[\varphi]_{\mathcal{S}}$ を定義するが，まずこのために $L$ の拡大 $L(\mathcal{A})$ を定義することにする．

$L(\mathcal{A})$ は $L$ に $c_a$ なる形の定数記号をすべての $a$ に対して導入することによって得られる．ここに $a$ は，すべての $\mathcal{A}$ の元 $A$ に対してそのすべての $a \in A$ なる $A$ の元を走るものとする．ここに $a \in A$ のときに $c_a$ のタイプを $A$ と定義する．

前と同様に $L$ の formula $\varphi$ が自由変数を含まないとき，$\varphi$ を $L$ の sentence という．また $L$ の term $t$ が自由変数を含まないとき，$t$ を $L$ の closed term という．

いま $t$ が $L(\mathcal{A})$ の closed term で $\mathcal{S}$ が $L$ の $\mathcal{A}$-構造であるとき $t[\mathcal{S}]$ を次のように定義する．

1）$t$ が $L$ の定数記号 $c$ であって，$\bar{c}$ が $\mathcal{S}$ で $c$ に対応するものとすれば $t[\mathcal{S}]=\bar{c}$ とする．

2) $t$ が $c_a$ の形であるとき $t[\mathcal{S}]=a$ と定義する.

3) $t$ が $F(t_1, \cdots, t_n)$ の形であって, $\bar{F}$ が $\mathcal{S}$ で $F$ に対応するもの, また $a_1=t_1[\mathcal{S}], \cdots, a_n=t_n[\mathcal{S}]$ とするとき, $t[\mathcal{S}]=\bar{F}(a_1, \cdots, a_n)$ と定義する.

殆んど明らかなように $t[\mathcal{S}]$ が $A$ の元になることと, $t$ のタイプが $A$ であることは同等である.

さていよいよ $\mathcal{S}$ が $L$ の $\mathcal{A}$- 構造で $\varphi$ が $L(\mathcal{A})$ の sentence であるときに $[\varphi]_{\mathcal{S}}$ または略して $[\varphi]$ を次のように定義する. $[\varphi]$ は $X$ の開集合となる.

1) $\varphi$ が $R(t_1, \cdots, t_n)$ の形のとき

$$[\varphi]=\bar{R}(a_1, \cdots, a_n).$$

ここに $\bar{R}$ は $\mathcal{S}$ で $R$ に対応する関係で, $a_1=t_1[\mathcal{S}], \cdots, a_n=t_n[\mathcal{S}]$ とする.

特に $\varphi$ が $t_1=t_2$ であるときは

$$[\varphi]=[a_1=a_2]$$

と定義する. ここに $a_1=t_1[\mathcal{S}], a_2=t_2[\mathcal{S}]$ であって, $[a_1=a_2]$ は第1章で定義されたものである.

また特に $\varphi$ が $\mathrm{E}t$ の形であるときは

$$[\varphi]=\mathrm{E}a$$

と定義する. ここに $a=t[\mathcal{S}]$ であり, $t$ のタイプを $A$ とするとき, $\mathrm{E}$ は $\langle A, \mathrm{E}, \neg\rangle$ の $\mathrm{E}$ である.

2) $\varphi$ が $\neg\varphi_1, \varphi_1\vee\varphi_2, \varphi_1\wedge\varphi_2, \varphi_1\longrightarrow\varphi_2$ の形であるとき.

このときは次の式によって定義する.

$$\neg[\varphi_1]=(X-[\varphi_1])^{\circ},$$
$$[\varphi_1\vee\varphi_2]=[\varphi_1]\cup[\varphi_2],$$
$$[\varphi_1\wedge\varphi_2]=[\varphi_1]\cap[\varphi_2],$$
$$[\varphi_1\longrightarrow\varphi_2]=((X-[\varphi_1])\cup[\varphi_2])^{\circ}.$$

3) $\varphi$ が $\forall x\phi(x)$ または $\exists x\phi(x)$ の形のとき.

このときは次の式によって定義する.

$$[\forall x\phi(x)]=\bigwedge_{a\in A}[\phi(c_a)],$$
$$[\exists x\phi(x)]=\bigcup_{a\in A}[\phi(c_a)],$$

ここに $A$ は $x$ のタイプであり, $\wedge$ は前節に定義したもの, すなわち $\bigwedge_i U_i$ は $(\bigcap_i U_i)^\circ$ のことである. 第二式における $\bigcup$ を $\vee$ でかえても同じことになる.

さて我々は $[\varphi]_{\mathcal{S}}=X$ のときに前と同じように $\mathcal{S}\models\varphi$ とかいて '$\varphi$ が $\mathcal{S}$ で成立する' と読むことにしよう. ここで我々はもう一つの概念の証明についてのべることにする.

$L$ の式 $\Gamma\Longrightarrow\Delta$ があたえられたとき (もちろん $\Delta$ は空か唯一つの formula からできているものとする)

$\Gamma\Longrightarrow\Delta$ が証明できるということを, 最初に出発する公理の式, すなわち $D\Longrightarrow D$ や $=$ についての公理 ($\Longrightarrow t=t$ など) の他に次のものを付加える.

$$\mathrm{E}s\vee\mathrm{E}t\longrightarrow s=t\Longrightarrow s=t$$

ここに $s$ と $t$ とは任意の term である. そしてそれからは前の直観論理の推論をくりかえして証明できることとする. ここで少しばかり説明を加えると $\forall$ と $\exists$ とにおいて, $a, x, t$ は同じタイプであるという条件が入っているものとする. すなわち

$$\frac{\varphi(t),\Gamma\Longrightarrow\Delta}{\forall x\varphi(x),\Gamma\Longrightarrow\Delta}\qquad\qquad\frac{\Gamma\Longrightarrow\varphi(a)}{\Gamma\Longrightarrow\forall x\varphi(x)}$$

左においては $\mathrm{typ}(t)=\mathrm{typ}(x)$, 右においては $\mathrm{typ}(a)=\mathrm{typ}(x)$ の条件が入っているものとする. $\exists$ についても全く同様である.

いま $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\Longrightarrow\Delta$ に自由変数が一つも入っていないとする. このとき $[\varphi_1,\cdots,\varphi_n\Longrightarrow\Delta]$ を $\Delta$ が $\psi$ のときは $[\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\longrightarrow\psi]$ と定義し, $\Delta$ が空のときは $[\neg(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n)]$ と定義する.

明らかに $[\varphi_1,\cdots,\varphi_n\Longrightarrow\Delta]=X$ は

$$[\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n]\subseteq[\Delta]$$

に同等である．ここに $[\varDelta]$ は $\varDelta$ が空のときは空集合であるとする．左辺で $n=0$ のときは $[\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n]=X$ と定義する．$\varGamma\Longrightarrow\varDelta$ で $\varGamma$ が $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ のときは $[\varGamma]=[\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n]$ と定義する．

**定理 2**　$\varGamma(a_1, \cdots, a_n)\Longrightarrow\varDelta(a_1, \cdots, a_n)$ が $L$ の証明可能な式で $a_1, \cdots, a_n$ はそのすべての自由変数であるとする．今 $X$ を任意の位相空間，$\mathscr{A}$ を $X$ の上の層の集合，更に $\mathscr{S}$ が $L$ の $\mathscr{A}$- 構造で $c_1, \cdots, c_n$ は $L(\mathscr{A})$ の任意の定数記号で $\mathrm{typ}(c_1)=\mathrm{typ}(a_1), \cdots, \mathrm{typ}(c_n)=\mathrm{typ}(a_n)$ をみたすものとする．このとき

$$[\varGamma(c_1, \cdots, c_n)\Longrightarrow\varDelta(c_1, \cdots, c_n)]=X,$$

すなわち

$$[\varGamma(c_1, \cdots, c_n)]\subseteq[\varDelta(c_1, \cdots, c_n)]$$

が成立する．

証明）　推論図についてはすべて前節定理1の証明を繰返す．今度の場合は $\forall$ や $\exists$ があるがこれは $\bigwedge_{a\in A}$, $\bigvee_{a\in A}$ で定義されるために全部前節の証明に戻ってしまう．

したがって残るものは $=$ および E についての次の性質である．

1)　$$\Longrightarrow t=t.$$

2)　$$t_1=t_2\Longrightarrow t_2=t_1.$$

3)　$$t_1=t_2, t_2=t_3\Longrightarrow t_1=t_3.$$

4)　$$s=t, \varphi(s)\Longrightarrow\varphi(t).$$

5)　$$\mathrm{E}s\vee\mathrm{E}t\longrightarrow s=t\Longrightarrow s=t.$$

ここで $\varGamma\Longrightarrow\varDelta$ が 1), 2), 3) の場合の証明は第1章定理2の ii), iii), iv) から明らかである．したがって 4) と 5) だけを証明すればよい．ところで 4) は $\varphi(s)$ が論理記号を全然含まないこの形の式から論理的推論だけで証明できるから，$\varphi(s)$ が $R(t_1(s), \cdots, t_n(s))$ の形であるとしてよい．このとき明らかに次の二つの形に分けて考えればよい．

6)　$$s=t\Longrightarrow T(s)=T(t).$$

7)　$$s_1=t_1, \cdots, s_n=t_n, R(s_1, \cdots, s_n)\Longrightarrow R(t_1, \cdots, t_n).$$

ここで $T(s)$ は任意の $s$ を含む term とする.

7) について定理が成立するためには次のことがいえればよい.

$$[a_1=b_1]\cap\cdots\cap[a_n=b_n]\cap\bar{R}(a_1, \cdots, a_n)\subseteq\bar{R}(b_1, \cdots, b_n).$$

さて $U=[a_1=b_1]\cap\cdots\cap[a_n=b_n]$ とおけば明らかに

$$a_1\urcorner U=b_1\urcorner U, \cdots, a_n\urcorner U=b_n\urcorner U$$

が成立する. ところで $\bar{R}$ が $\mathscr{A}$ の上の関係であることから

$$\begin{aligned} U\cap\bar{R}(a_1, \cdots, a_n) &= \bar{R}(a_1\urcorner U, \cdots, a_n\urcorner U)\cap U \\ &= \bar{R}(b_1\urcorner U, \cdots, b_n\urcorner U)\cap U \\ &= \bar{R}(b_1, \cdots, b_n)\cap U \\ &\subseteq \bar{R}(b_1, \cdots, b_n) \end{aligned}$$

となって証明が完成した. $R$ が E のときは第1章定理2の viii) による.

6) について定理を $T(s)$ のなかの関数記号の数についての数学的帰納法で証明する. したがって次のことが $L$ の関数記号 $F$ についていえればよい.

$$[a_1=b_1]\cap\cdots\cap[a_n=b_n]\subseteq[\bar{F}(a_1, \cdots, a_n)=\bar{F}(b_1, \cdots, b_n)]$$

前と同じく $U=[a_1=b_1]\cap\cdots\cap[a_n=b_n]$ とおけば明らかに $a_1\urcorner U=b_1\urcorner U, \cdots, a_n\urcorner U=b_n\urcorner U$ が成立する. $[a=b]$ の定義から証明したいことは

$$\bar{F}(a_1, \cdots, a_n)\urcorner U=\bar{F}(b_1, \cdots, b_n)\urcorner U$$

であるがこれは $\bar{F}$ が $\mathscr{A}$ の上の演算であるから次のことから明らかである.

$$\begin{aligned} \bar{F}(a_1, \cdots, a_n)\urcorner U &= \bar{F}(a_1\urcorner U, \cdots, a_n\urcorner U)\urcorner U \\ &= \bar{F}(b_1\urcorner U, \cdots, b_n\urcorner U)\urcorner U \\ &= \bar{F}(b_1, \cdots, b_n)\urcorner U. \end{aligned}$$

次に 5) を考えよう. このためには次の形を証明すればよい.

$$((X-(\mathrm{E}a\cup\mathrm{E}b))\cup[a=b])^\circ\subseteq[a=b].$$

このために任意の開集合 $U$ をとって

$$U\subseteq(X-(\mathrm{E}a\cup\mathrm{E}b))\cup[a=b]\Longrightarrow U\subseteq[a=b]$$

を証明すればよい. ところで第1章定理 2 vii) により

$$(\mathrm{E}a\cup\mathrm{E}b)\cap U\subseteq[a=b]\Longrightarrow U\subseteq[a=b]$$

であるから上の式は直ちに証明される.

以上によって定理の証明が完成した.

さてこの定理の逆は証明できるであろうか？　すなわちそのタイプの集合が $\mathcal{T}$ となるような言語 $L$ とその式

$$\Gamma(a_1, \cdots, a_n) \Longrightarrow \varDelta(a_1, \cdots, a_n)$$

があたえられたとき，どんな位相空間 $X$ とその層の集合 $\mathcal{A}$ と $L$ の $\mathcal{A}$-構造 $\mathcal{S}$ をとっても，$\mathcal{T}$ と $\mathcal{A}$ との間の一対一の対応が $\mathcal{S}$ でつけられていれば，どんな $L(\mathcal{A})$ の定数記号 $c_1, \cdots, c_n$ をとってきても

$$[\Gamma(c_1, \cdots, c_n) \Longrightarrow \varDelta(c_1, \cdots, c_n)] = X$$

となるときに，$\Gamma \Longrightarrow \varDelta$ は証明できるであろうか？

我々はこの定理の逆を多少弱い形で証明する．その弱い形をハッキリとのべるために次の定義をする．

$\varphi$ のなかの $\forall x$ が正規であるとはこれが $\forall x(\mathrm{E}x \longrightarrow \cdots)$ の形で現われていることをいう．$\varphi$ のなかの $\exists x$ が正規であるとはこれが $\exists x(\mathrm{E}x \wedge \cdots)$ の形で現われていることをいう．$\varphi$ のなかのすべての $\forall$ と $\exists$ とが正規であるとき $\varphi$ は正規であるという．

今後我々は $L$ のなかの formula はすべて正規のものだけに制限して考えることにする．このように制限すると上述の定理の逆が成立する．すなわち $\Gamma \Longrightarrow \varDelta$ の $\Gamma$ や $\varDelta$ のすべての formula が正規のときには上の定理の逆が成立して完全性定理とよばれる．

正規な formula だけに制限することは強い制限のように思われるかも知れないがそうではない．層やトポスに関する限り，むしろこの正規なものだけに制限して考えるのが自然なのである．

完全性定理の証明の準備を次の節でやってそれから完全性定理を証明することにする．

## 5. 前構造

前節と同じく言語 $L$ をとり，そのタイプの集合を $\mathcal{T}$ とする．

いま $X$ を位相空間とするとき $\mathcal{S}^*$ が $L$ の前構造であるということを次の条件によって定義する．

1)　$A$ を $L$ のタイプとするとき $\mathcal{S}^*$ に $A$ に対応する $A^*$ が存在して $A^*$ は集合である．

2)　$A$ を $L$ のタイプとするとき

$$[\mathrm{E}\quad]: A^* \longrightarrow \mathfrak{O}(X)$$

なる関数が $\mathcal{S}^*$ で定義されている．$u \in A^*$ とするとき，この関数によるその値を $[\mathrm{E}u]$ とかく．

3)　$A$ を $L$ のタイプとするとき

$$[\ =\ ]: A^* \times A^* \longrightarrow \mathfrak{O}(X)$$

なる関数が $\mathcal{S}^*$ で定義されている．$u, v \in A^*$ とするときにこの関数による値を $[u=v]$ とかく．

4)　$c$ を $L$ の定数記号でそのタイプを $A$ とするとき $c^* \in A^*$ なる $c^*$ が $\mathcal{S}^*$ で定義されている．

5)　$R$ を $L$ の関係記号でそのタイプを $\langle A_1, \cdots, A_n\rangle$ とするとき

$$[R(,\cdots,)]:\ A_1{}^* \times \cdots \times A_n{}^* \longrightarrow \mathfrak{O}(X)$$

なる関数が $\mathcal{S}^*$ で定義されている．$u_1 \in A_1{}^*, \cdots, u_n \in A_n{}^*$ とするときこの関数によるその値を $[R(u_1, \cdots, u_n)]$ で表わす．

6)　$F$ を $L$ の関数記号とし，$F$ のタイプは $\langle A_1, \cdots, A_n\rangle$ と $A$ との組であるとするとき

$$F^*:\ A_1{}^* \times \cdots \times A_n{}^* \longrightarrow A^*$$

なる $F^*$ が $\mathcal{S}^*$ で定義されている．$u_1 \in A_1{}^*, \cdots, u_n \in A_n{}^*$ のときその $F^*$ による値を $F^*(u_1, \cdots, u_n)$ とかく．

7)　以上の関数は次の性質をみたしている．

i)
$$[u_1=u_2] \cap [u_2=u_3] \subseteq [u_1=u_3].$$

ii)
$$[u=u]=X.$$

iii) $$(([\mathrm{E}u]\cup[\mathrm{E}v])\longrightarrow[u=v])\subseteq[u=v].$$

ここに $E\longrightarrow F$ は $((X-E)\cup F)^\circ$ のことである.

iv) $$[\mathrm{E}u]\cap[u=v]\subseteq[\mathrm{E}v].$$

v) $$[R(u_1,\cdots,u_n)]\cap[u_1=v_1]\cap\cdots\cap[u_n=v_n]\subseteq[R(v_1,\cdots,v_n)].$$

vi) $$[u_1=v_1]\cap\cdots\cap[u_n=v_n]\subseteq[F(u_1,\cdots,u_n)=F(v_1,\cdots,v_n)].$$

さていま言語 $L$ の $X$ の上の前構造 $\mathcal{S}^*$ があたえられているとする. このとき $\mathcal{S}^*$ から $X$ の上の $L$ の構造 $\dot{\mathcal{S}}$ を作ることを考える. 以下に $\dot{\mathcal{S}}$ の構成要素を順々に定義して行くことにする.

いま $A$ を $L$ のタイプとするとき $\dot{A}$ を次によって定義する.

$\dot{A}$ は次の三条件をみたす $a\colon A^*\longrightarrow\mathfrak{O}(X)$ なる関数 $a$ の集合と定義する.

i) $$a(u)\subseteq[\mathrm{E}u].$$

ii) $$a(u)\cap[u=v]\subseteq a(v).$$

iii) $$a(u)\cap a(v)\subseteq[u=v].$$

ここに $u,v$ は $A^*$ の任意の元であり $[\mathrm{E}\quad],[\ =\ ]$ は $\mathcal{S}^*$ で定義されたものである.

いま $a\in\dot{A}$ とするとき $\mathrm{E}a$ を次のように定義する.

$$\mathrm{E}a=\bigcup_{u\in A^*}a(u).$$

更に $a\urcorner U$ を次の式によって定義する.

$$(a\urcorner U)(u)=a(u)\cap U.$$

さて $\dot{\mathcal{S}}$ の定義を先に進める前に, まず $\mathcal{S}^*$ を $\dot{\mathcal{S}}$ に埋蔵することを考えよう.

$A$ を $L$ のタイプとして $u\in A^*$ なる $u$ をとって, $\dot{u}$ なる $\dot{A}$ の元を次の式によって定義する.

$$\dot{u}(v)=[\mathrm{E}u]\cap[u=v].$$

$\dot{u}$ が $\dot{A}$ の元になることを補題の形で証明しよう.

**補題 1** 次の性質が成立する.

i) $$\dot{u}(v)\subseteq[\mathrm{E}v].$$

ii) $$\dot{u}(v_1)\cap[v_1=v_2]\subseteq\dot{u}(v_2).$$

iii) $$\dot{u}(v_1)\cap\dot{u}(v_2)\subseteq[v_1=v_2].$$

証明） i) は $[\mathrm{E}u]\cap[u=v]\subseteq[\mathrm{E}v]$ から明らか．

ii) は $[\mathrm{E}u]\cap[u=v_1]\cap[v_1=v_2]\subseteq[\mathrm{E}u]\cap[u=v_2]$．故に明らか．

iii) は $[\mathrm{E}u]\cap[u=v_1]\cap[\mathrm{E}u]\cap[u=v_2]\subseteq[v_1=v_2]$．故に明らか．

更に次の簡単な性質が成立する．

**補題 2** $$[\dot{u}_1=\dot{u}_2]=[u_1=u_2].$$

ここで $[\dot{u}_1=\dot{u}_2]$ は $\dot{\mathcal{S}}$ での定義，すなわち

$$\bigcup\{U|\dot{u}_1\urcorner U=\dot{u}_2\urcorner U\}$$

を意味する．

証明） i) $$[u_1=u_2]\subseteq[\dot{u}_1=\dot{u}_2]$$

と

ii) $$[\dot{u}_1=\dot{u}_2]\subseteq[u_1=u_2]$$

とに分けて証明する．

i) $\dot{u}_1\urcorner[u_1=u_2]=\dot{u}_2\urcorner[u_1=u_2]$ をいえばよい．

$$\begin{aligned}(\dot{u}_1\urcorner[u_1=u_2])(v)&=\dot{u}_1(v)\cap[u_1=u_2]\\&=[\mathrm{E}u_1]\cap[u_1=v]\cap[u_1=u_2]\\&=\dot{u}_2(v)\cap[u_1=u_2].\end{aligned}$$

ii) $U=[\dot{u}_1=\dot{u}_2]$ と定義すれば $\dot{u}_1\urcorner U=\dot{u}_2\urcorner U$ が成立する．

$$\begin{aligned}(\dot{u}_1\urcorner U)(v)&=\dot{u}_1(v)\cap U\\&=[\mathrm{E}u_1]\cap[u_1=v]\cap U\\&=[\mathrm{E}u_2]\cap[u_2=v]\cap U.\end{aligned}$$

$v$ として $u_1$ をとれば $[\mathrm{E}u_1]\cap U\subseteq[u_1=u_2]$．

同様にして $$[\mathrm{E}u_2]\cap U\subseteq[u_1=u_2].$$

ゆえに

$$([\mathrm{E}u_1]\cup[\mathrm{E}u_2])\cap U\subseteq[u_1=u_2].$$

開集合は直観論理の法則に従うから

$$U \Longrightarrow ([\mathrm{E}u_1] \vee [\mathrm{E}u_2]) \longrightarrow [u_1 = u_2],$$

$\mathcal{S}^*$ の公理とこれから $U \Longrightarrow [u_1 = u_2]$, すなわち $U \subseteq [u_1 = u_2]$ が得られた.

上の補題にもとづいて $\dot{\mathcal{S}}$ の定義をつづける.

$R$ を $L$ の関係記号とするとき, $\dot{R}$ を次の式によって定義する.

$$\dot{R}(a_1, \cdots, a_n) = \bigcup \{U \mid \exists u_1 \cdots \exists u_n (U \subseteq [R(u_1, \cdots, u_n)] \wedge \dot{u}_1 \urcorner U = a_1 \urcorner U \wedge \cdots \wedge \dot{u}_n \urcorner U = a_n \urcorner U)\}.$$

$F$ を $L$ の関数記号とするとき $\dot{F}$ を $\dot{F}(a_1, \cdots, a_n)(v)$ を次のものと定義することによって定義する.

$$\bigcup \{U \mid \exists u_1 \cdots \exists u_n (U \subseteq [\mathrm{E}v] \wedge U \subseteq [F^*(u_1, \cdots, u_n) = v] \wedge \dot{u}_1 \urcorner U = a_1 \urcorner U \wedge \cdots \wedge \dot{u}_n \urcorner U = a_n \urcorner U)\}.$$

$c$ を $L$ の定数記号とするとき $\dot{c}$ を $\dot{c}^*$ によって定義する.

さて次の定理が本節の目的であって本節の終りまで次の定理の証明をつづけることにする.

**定理 3**　$\mathcal{S}^*$ を $L$ の前構造とするとき, 次の色々の性質が成立する.

1)　$\dot{\mathcal{S}}$ は $L$ の構造である.

2)
$$(F^*(u_1, \cdots, u_n))^{\cdot} = \dot{F}(\dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n).$$

3)
$$[\mathrm{E}u] = \mathrm{E}\dot{u}.$$

4)
$$[u_1 = u_2] = [\dot{u}_1 = \dot{u}_2].$$

5)
$$[R(u_1, \cdots, u_n)] = \dot{R}(\dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n).$$

6)
$$[\forall x (\mathrm{E}x \longrightarrow \varphi(x))]_{\dot{\mathcal{S}}} = \bigwedge_{u \in A^*} [\mathrm{E}\dot{u} \longrightarrow \varphi(\dot{u})]_{\dot{\mathcal{S}}}.$$

ここに $A$ は $x$ のタイプとする.

7)
$$[\exists x (\mathrm{E}x \wedge \varphi(x))]_{\dot{\mathcal{S}}} = \bigcup_{u \in A^*} [\mathrm{E}\dot{u} \wedge \varphi(\dot{u})]_{\dot{\mathcal{S}}}.$$

ここに $A$ は $x$ のタイプである.

8)
$$[\dot{\varphi}]_{\dot{\mathcal{S}}} = [\varphi]_{\mathcal{S}^*}.$$

ここに $\varphi$ は, $\mathcal{S}^*$ の元を表わす $c_u$ なる定数記号を含んだ $L(\mathcal{S}^*)$ の

sentence で，$\dot{\varphi}$ はその $c_u$ の所を $c_{\dot{u}}$ にかえて得られる $L(\dot{\mathcal{S}})$ の sentence とする．尚 $[\varphi]_{\mathcal{S}}$. は $\varphi$ が論理記号を含んでいないときは定義されているから論理記号のある所は [ ] の定義と同じ規則を用いて定義するものとする．勿論我々は正規な $\varphi$ だけを考えている．

証明） 1） $A$ を $L$ のタイプとしてまず $\dot{A}$ が前層であることをいう．このため $a\in\dot{A}$ をとってくる．

i)
$$a\urcorner \mathrm{E}a=a.$$
$$(a\urcorner \mathrm{E}a)(u)=a(u)\cap \mathrm{E}a,$$
ところで $\mathrm{E}a=\bigcup a(u)\supseteq a(u)$ だからよい．

ii)
$$\mathrm{E}(a\urcorner U)=\mathrm{E}a\cap U.$$
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(a\urcorner U)&=\bigcup_u (a\urcorner U)(u)=\bigcup_u (a(u)\cap U)\\&=\bigcup_u a(u)\cap U=\mathrm{E}a\cap U.\end{aligned}$$

iii)
$$(a\urcorner U)\urcorner V=a\urcorner (U\cap V).$$
$$\begin{aligned}((a\urcorner U)\urcorner V)(u)&=(a\urcorner U)(u)\cap V=a(u)\cap U\cap V\\&=(a\urcorner (U\cap V))(u).\end{aligned}$$

次に $\dot{A}$ が層であることをいう．ゆえに $\mathcal{F}$ を互いに両立する $\dot{A}$ の元の集合であるとする．このとき $g$ を
$$g(v)=\bigcup_{a\in\mathcal{F}} a(v)$$
によって定義する．このとき $g\in\dot{A}$ となることは演習問題として読者に残したい．さて $g$ が求める $\bigcup\mathcal{F}$ であることを計算する．
$$\mathrm{E}g=\bigcup_{\substack{v\\a\in\mathcal{F}}} a(v)=\bigcup_{a\in\mathcal{F}} \mathrm{E}a.$$

次に $g\urcorner \mathrm{E}a=a$ を証明する．
$$\begin{aligned}(g\urcorner \mathrm{E}a)(v)&=g(v)\cap \mathrm{E}a=\bigcup_{b\in\mathcal{F}} b(v)\cap \mathrm{E}a\\&=\bigcup_{b\in\mathcal{F}} a(v)\cap \mathrm{E}b=a(v)\cap\bigcup_{b\in\mathcal{F}} \mathrm{E}b\\&=a(v).\end{aligned}$$

さらにもう一つ $g'$ が $\dot{A}$ にあって $\mathrm{E}g'=\bigcup_{a\in\mathcal{F}}\mathrm{E}a$ で $a\in\mathcal{F}$ ならば $g'\urcorner \mathrm{E}a=a$ が成立するとすれば，$(g'\urcorner \mathrm{E}a)(u)=a(u)$ となるから，$g'(u)\cap \mathrm{E}a=a(u)$,

したがって

$$g'(u)=g'(u)\cap \mathrm{E}g'=g'(u)\cap\bigcup_{a\in\mathcal{F}}\mathrm{E}a$$
$$=\bigcup_{a\in\mathcal{F}}a(u)$$
$$=g(u)$$

となって $\dot{A}$ が層であることがわかった．更に $\dot{F}$ が $\dot{\mathcal{S}}$ の演算，$\dot{R}$ が $\dot{\mathcal{S}}$ の関係になっていることを証明しなければならないが，これは読者への演習問題として残したい．

2) $\dot{F}(\dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n)(v)=\bigcup\{U|\exists u_1'\cdots\exists u_n'(U\subseteq[Ev]$
$$\wedge U\subseteq[F^*(u_1', \cdots, u_n')=v]$$
$$\wedge \dot{u}_1'\urcorner U=\dot{u}_1\urcorner U\wedge\cdots\wedge\dot{u}_n'\urcorner U=\dot{u}_n\urcorner U)\}.$$

一方

$$\dot{u}'\urcorner U=\dot{u}\urcorner U\Longrightarrow(\dot{u}'\urcorner U)(v)=(\dot{u}\urcorner U)(v)$$
$$\Longrightarrow\dot{u}'(v)\cap U=\dot{u}(v)\cap U$$
$$\Longrightarrow[\mathrm{E}u']\cap[v=u']\cap U=[\mathrm{E}u]\cap[v=u]\cap U.$$

これから補題2の ii) と同様にして $U\subseteq[u=u']$ が得られる．逆に $U\subseteq[u=u']$ ならば補題2によって $\dot{u}'\urcorner U=\dot{u}\urcorner U$ が出るからこれから

$$\dot{F}(\dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n)(v)=\bigcup\{U|U\subseteq[\mathrm{E}v]\wedge U\subseteq[F^*(u_1, \cdots, u_n)=v]\}$$
$$=[\mathrm{E}v]\cap[F^*(u_1, \cdots, u_n)=v]$$
$$=[\mathrm{E}F^*(u_1, \cdots, u_n)]\cap[F^*(u_1, \cdots, u_n)=v]$$
$$=(F^*(u_1, \cdots, u_n))^{\cdot}(v).$$

3) $$[\mathrm{E}u]=\mathrm{E}\dot{u}.$$

$$\mathrm{E}\dot{u}=\bigcup_v\dot{u}(v)=\bigcup_v[\mathrm{E}u]\cap[u=v]=[\mathrm{E}u].$$

4) は既に補題2で証明した．

5) $$[R(u_1, \cdots, u_n)]=\dot{R}(\dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n).$$

これは 2) と同様に証明される．

6) $$[\forall x(\mathrm{E}x\longrightarrow\varphi(x))]_{\dot{\mathcal{S}}}=\bigwedge_{u\in A^*}[\mathrm{E}\dot{u}\longrightarrow\varphi(\dot{u})]_{\dot{\mathcal{S}}}.$$

(左辺)⊆(右辺) は明らかだから，(右辺)⊆(左辺) だけを証明すればよい．

前に証明したように開集合は直観論理の推論法則をみたすから論理の方で上のものをのべれば証明したいことは

$$\forall u(\mathrm{E}\dot{u} \longrightarrow \varphi(\dot{u})) \Longrightarrow \mathrm{E}a \longrightarrow \varphi(a),$$

したがって

$$\mathrm{E}a,\ \forall u(\mathrm{E}\dot{u} \longrightarrow \varphi(\dot{u})) \Longrightarrow \mathrm{E}a \longrightarrow \varphi(a)$$

をいえばよい．$\mathrm{E}a = \bigcup_u a(u) = \exists u a(u)$ だから

$$a(u),\ \forall u(\mathrm{E}\dot{u} \longrightarrow \varphi(\dot{u})) \Longrightarrow \mathrm{E}a \longrightarrow \varphi(a)$$

をいえばよい．したがって次のことをいえば充分である．

$$a(u) \Longrightarrow a = \dot{u}.$$

さて $[a=\dot{u}] = \bigcup \{U | a \urcorner U = \dot{u} \urcorner U\}$ であるから $U = a(u)$ とおいて

$$a \urcorner U = \dot{u} \urcorner U$$

をいえばよい．ところで

$$(a \urcorner U)(v) = a(v) \cap U,$$

$$(\dot{u} \urcorner U)(v) = \dot{u}(v) \cap U = [\mathrm{E}u] \cap [u=v] \cap U.$$

ところで $a$ に対する条件は

$$a(u) \Longrightarrow \mathrm{E}u,$$

$$a(u),\ u=v \Longrightarrow a(v),$$

$$a(u),\ a(v) \Longrightarrow u=v$$

であるから

$$a(v) \wedge a(u) \Longleftrightarrow \mathrm{E}u \wedge u=v \wedge a(u).$$

これは上の $(a \urcorner U)(v) = (\dot{u} \urcorner U)(v)$ である．したがって $a(u) \Longrightarrow a = \dot{u}$.

7)　$$[\exists x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x))]_{\mathfrak{s}} = \bigvee_{u \in A^*} [\mathrm{E}\dot{u} \wedge \varphi(\dot{u})].$$

(左辺)⊇(右辺) は明らかであるから (右辺)⊇(左辺) だけを証明すればよい．論理の方の形でかけば

$$\exists a(\mathrm{E}a \wedge \varphi(a)) \Longrightarrow \exists u(\mathrm{E}\dot{u} \wedge \varphi(\dot{u})).$$

別々にほどいて行けば

$$\mathrm{E}a,\ \mathrm{E}a \wedge \varphi(a) \Longrightarrow \exists u(\mathrm{E}\dot{u} \wedge \varphi(\dot{u})),$$

$$a(u),\ \mathrm{E}a \wedge \varphi(a) \Longrightarrow \exists u(\mathrm{E}\dot{u} \wedge \varphi(\dot{u})),$$

$$a(u) \Longrightarrow a=\dot{u}$$

となって上の 6) の証明から証明が終る．勿論本当の証明は上の式を下から上へと眺めて行くのである．

8) $\varphi$ のなかの論理記号の数についての数学的帰納法によって証明する．必要なものは全部 1) —7) までに証明されている．

## 6. 完全性定理

まず最初にこれから考える formula はすべて正規であることを念のためにもう一度断っておく．

さて言語 $L$ を一つきめて，$L$ の sentence の集合 $\Gamma$ を一つ考える．

$L$ の formula $\varphi$ が $\Gamma$ から証明できるということを

$\Gamma$ の有限の部分集合 $\Gamma_0$ を適当にとると $\Gamma_0 \Longrightarrow \varphi$ が我々の論理体系で証明できる

ことであると定義し，$\Gamma \vdash \varphi$ とかく．

以下に我々は前節の結果と数理論理学で慣用の方法とで完全性定理を証明しようというのである．まず数理論理学で慣用の方法についてキチンとのべるために次の定義をする．

**定義**　$\Gamma$ を $L$ の sentence の集合とする．$\Gamma$ が $\vee$- 分離的ということを

$$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi \quad \text{または} \quad \Gamma \vdash \psi$$

がすべての $L$ の sentence $\varphi, \psi$ に対して成立していること

と定義する．

$\Gamma$ が Henkin 的であるということを

$\Gamma \vdash \exists x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x))$ ならば‘ある $L$ の定数記号 $c$ で $\Gamma \vdash (\mathrm{E}c \wedge \varphi(c))$ なるものが存在する’がすべての $\exists x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x))$ の形の $L$ の sentence に対して成立していること

と定義する．

この定義のもとで次の定理が成立する．

**定理 4** $\Gamma$ を言語 $L$ の sentence の集合であって，ある $L$ の sentence $\varphi$ に対して $\Gamma \nvdash \varphi$（これは $\Gamma \vdash \varphi$ でないということ）であったとする．いま $L$ の formula 全体の集合の濃度を $\mathfrak{n}$ とする．

更にすべての $L$ のタイプについてそのタイプに属する新しい $\mathfrak{n}$ 個の定数記号を導入してその全体の $\mathfrak{n}$ 個の定数記号を整列して $\{c_0, c_1, \cdots, c_\alpha, \cdots\}_{\alpha<\mathfrak{n}}$ とする．この $\{c_0, \cdots, c_\alpha, \cdots\}_{\alpha<\mathfrak{n}}$ で $L$ を拡大したものを $L^*$ とする．すなわち

$$L^* = L \cup \{c_0, c_1, \cdots, c_\alpha, \cdots\}_{\alpha<\mathfrak{n}}.$$

このとき $L^*$ の sentence の集合 $\Gamma^*$ で次の条件を満足するものが存在する．

i) $\Gamma^*$ は $\vee$- 分離的で Henkin 的である．

ii) $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ すなわち $\Gamma^*$ は $\Gamma$ の拡大である．

iii) $\Gamma^* \nvdash \varphi$.

証明） 一般性を失うことなく $L^*$ の sentence を全部整列して $O_0, O_1, \cdots, O_\alpha, \cdots_{\alpha<\mathfrak{n}}$ として次の条件を満足しているようにできる．

$O_0, O_1, \cdots, O_\alpha$ までには $c_\alpha$ は出てこない．さて $\Gamma^0, \Gamma^1, \cdots, \Gamma^\alpha, \cdots_{\alpha<\mathfrak{n}}$ を下のように $\alpha$ ごとに作って行く．但し $0=(-1)+1$ と考えて $\Gamma^{-1}=\Gamma$ と定義し，更に $\alpha$ が極限数のときは $\alpha=\alpha^-+1$ として $\Gamma^{\alpha^-}=\bigcup_{\beta<\alpha}\Gamma^\beta$ のこととする．

1) $O_\alpha = \psi \vee \chi$ の形で $\Gamma^\alpha, \psi \nvdash \varphi$ ならば

$$\Gamma^{\alpha+1} = \Gamma^\alpha \cup \{\psi\}$$

と定義する．

2) $O_\alpha = \psi \vee \chi$ の形で 1) が成立せず $\Gamma^\alpha, \chi \nvdash \varphi$ ならば

$$\Gamma^{\alpha+1} = \Gamma^\alpha \cup \{\chi\}$$

と定義する．

3) $O_\alpha$ が $\exists x(\mathrm{E}x \wedge \psi(x))$ の形であれば

$$\Gamma^{\alpha+1} = \Gamma^\alpha \cup \{\mathrm{E}c_\alpha \wedge \psi(c_\alpha)\}$$

と定義する．

4) 以上のいずれでもなければ

$$\Gamma^{\alpha+1}=\Gamma^{\alpha}$$

と定義する.

最後に $\Gamma^*=\bigcup_{\alpha<n}\Gamma^{\alpha}$ と定義すれば $\Gamma^*$ が定理の条件をみたすことは数理論理学のやさしい演習問題の一つだから読者にまかせることにする.

一般に言語 $L$ の sentence の集合 $\Gamma$ が $\vdash$ に関して閉じているとき, すなわちすべての $L$ の sentence $\varphi$ に対して

$$\Gamma\vdash\varphi \Longrightarrow \varphi\in\Gamma$$

が成立しているときに $\Gamma$ を $L$ の theory という.

$L$ の theory $\Gamma$ が $L$ の sentence 全部を含んでいないとき $\Gamma$ を無矛盾であるという.

さて $\Gamma$ は $L$ の無矛盾な theory, $L^*$ は前と同じくすべての $L$ のタイプについてそのタイプに属する $n$ 個の定数記号を導入して $L$ を拡大してできたものとする. 以下 $L^*$ を一つ固定する. このとき Spec($\Gamma$) を次の集合であると定義する.

{$\Pi$ | $\Pi$ は $L^*$ の theory で無矛盾, $\vee$- 分離的で Henkin 的である}.

Spec($\Gamma$) が空でないことは定理 4 によって明らかであろう. いま Spec($\Gamma$) に位相を導入しよう.

いま $\varphi$ を $L^*$ の sentence とするとき

$$U_{\varphi}=\{\Pi\in \mathrm{Spec}(\Gamma)\,|\,\varphi\in\Pi\}$$

によって $U_{\varphi}$ を定義し, $\Pi\in$ Spec($\Gamma$) である $\Pi$ の近傍を $\Pi$ から sentence $\varphi$ を任意にとって $U_{\varphi}$ とするのである.

$$U_{\varphi_1}\cap U_{\varphi_2}\cap\cdots\cap U_{\varphi_n}=U_{\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n}$$

となるので Spec($\Gamma$) が位相空間になることは明らかであろう.

さて $A$ を $L^*$ のタイプ (これは $L$ のタイプといっても同じことである) として $A^*$ を次の集合であると定義する.

$$A^*=\{t\,|\,t \text{ は } L^* \text{ のタイプ } A \text{ の closed term である}\}.$$

これですべてのタイプ $A$ に対して $A^*$ が定義できたから, この $A^*$ を用い

て我々は $\mathrm{Spec}(\Gamma)$ の上の前構造を構成するために $[\mathrm{E}]$, $[=]$, $[R(\ ,\cdots,\ )]$, $F^*$ および $c^*$ の定義をあたえよう．次のものはすべて定義である．$s, t, \cdots$ は closed term であるとする．

$$[\mathrm{E}s]=\{\Pi\in\mathrm{Spec}(\Gamma)|\mathrm{E}s\in\Pi\},$$

$$[s=t]=\{\Pi\in\mathrm{Spec}(\Gamma)|s=t\in\Pi\},$$

$$[R(s_1,\cdots,s_n)]=\{\Pi\in\mathrm{Spec}(\Gamma)|R(s_1,\cdots,s_n)\in\Pi\},$$

$$F^*(s_1,\cdots,s_n)=F(s_1,\cdots,s_n),$$

$$c^*=c.$$

さてこの定義によって $\mathrm{Spec}(\Gamma)$ の上の前構造が得られたことを証明しよう．まず $[\mathrm{E}s]$, $[s=t]$, $[R(s_1,\cdots,s_n)]$ が $\mathrm{Spec}(\Gamma)$ の開集合になっていることは明らかであろう．

次に前構造であるための条件を順々に証明して行くことにする．

1)
$$[s_1=s_2]\cap[s_2=s_3]\subseteq[s_1=s_3].$$

これは $s_1=s_2, s_2=s_3\Longrightarrow s_1=s_3$ が論理的な公理だから明らか．

2)
$$[s=s]=\mathrm{Spec}(\Gamma).$$

$\Longrightarrow s=s$ が論理的な公理だから明らか．

3)
$$(([\mathrm{E}s]\cup[\mathrm{E}t])\longrightarrow[s=t])\subseteq[s=t].$$

任意の $U_\varphi$ をとったとき

$$U_\varphi\subseteq(([\mathrm{E}s]\cup[\mathrm{E}t])\longrightarrow[s=t])\Longrightarrow U_\varphi\subseteq[s=t]$$

を証明すればよい．

$$U_\varphi\subseteq(([\mathrm{E}s]\cup[\mathrm{E}t])\longrightarrow[s=t])$$

は

*)
$$U_\varphi\cap([\mathrm{E}s]\cup[\mathrm{E}t])\subseteq[s=t]$$

を意味する．ところで $\Pi\in\mathrm{Spec}(\Gamma)$ であれば

$$(\mathrm{E}s\vee\mathrm{E}t)\in\Pi\Leftrightarrow\Pi\in([\mathrm{E}s]\cup[\mathrm{E}t])$$

であるから，$\mathrm{E}s\vee\mathrm{E}t\notin\Pi, s=t\notin\Pi, \varphi\in\Pi$ を仮定して $s=t\in\Pi$ を証明すればよい．

最初に $\Pi, \mathrm{E}s\vee\mathrm{E}t\Longrightarrow s=t$ が証明できることをいう．もしそうでなければ

定理4により，$\Pi\cup\{\mathrm{E}s\vee\mathrm{E}t\}$ の拡大 $\tilde{\Pi}\in\mathrm{Spec}(\Gamma)$ で $s=t\notin\tilde{\Pi}$ なものがある．これは上の条件 *）に矛盾する．ゆえに

$$\Pi, \mathrm{E}s\vee\mathrm{E}t\Longrightarrow s=t$$

が証明できる．これから $\Pi\Longrightarrow s=t$ が証明できることが直ちに出てきて証明が終った．

4）このあとの前構造の性質はすべて論理の $=$ についての公理から明らかである．

いまかくしてできた $\mathrm{Spec}(\Gamma)$ の上の前構造を $\mathcal{S}^*$ とかくことにする．この $\mathcal{S}^*$ をもとにして前節で作った $\dot{\mathcal{S}}$ を作ることにする．このとき次の定理が成立する．後で説明するが，この定理から完全性定理は系として直ちに出てくる．

**定理 5** $\varphi$ を $L^*$ の sentence として，そのなかの定数記号 $c_u$ をすべて $c_{\dot{u}}$ にかえてできる sentence を $\dot{\varphi}$ とする．このとき次のことが成立する．

$$[\dot{\varphi}]_{\mathcal{S}}=\{\Pi\in\mathrm{Spec}(\Gamma)|\varphi\in\Pi\}.$$

証明）まず定理3によって $(F^*(u_1,\cdots,u_n))^{\cdot}=\dot{F}(\dot{u}_1,\cdots,\dot{u}_n)$ であるから，$s$ が $\varphi$ のなかの term であるとき，$\dot{\varphi}$ のなかで $s$ は $\dot{s}$ の形をしているものと思えばよい．

さて順々に証明して行くことにしよう．定理3を断わりなしにヒンパンに用いる．

1）$\varphi$ が $s_1=s_2$ のとき

$$[\dot{s}_1=\dot{s}_2]_{\mathcal{S}}=[s_1=s_2]=\{\Pi|(s_1=s_2)\in\Pi\}.$$

2）$\varphi$ が $\mathrm{E}s$ のとき

$$[\mathrm{E}\dot{s}]_{\mathcal{S}}=[\mathrm{E}s]=\{\Pi|\mathrm{E}s\in\Pi\}.$$

3）$\varphi$ が $R(s_1,\cdots,s_n)$ のとき

$$[\dot{R}(\dot{s}_1,\cdots,\dot{s}_n)]=[R(s_1,\cdots,s_n)]=\{\Pi|R(s_1,\cdots,s_n)\in\Pi\}.$$

4）$\varphi$ が $\varphi_1\wedge\varphi_2$ の形のとき

$$[\dot{\varphi}_1\wedge\dot{\varphi}_2]=[\dot{\varphi}_1]\cap[\dot{\varphi}_2]$$

$$=\{\Pi|\varphi_1\in\Pi\}\cap\{\Pi|\varphi_2\in\Pi\}$$
$$=\{\Pi|(\varphi_1\wedge\varphi_2)\in\Pi\}.$$

5)　$\varphi$ が $\varphi_1\vee\varphi_2$ の形のとき

$$[\dot{\varphi}_1\vee\dot{\varphi}_2]=[\dot{\varphi}_1]\cup[\dot{\varphi}_2]$$
$$=\{\Pi|\varphi_1\in\Pi\}\cup\{\Pi|\varphi_2\in\Pi\}$$
$$=\{\Pi|(\varphi_1\vee\varphi_2)\in\Pi\}.$$

6)　$\varphi$ が $\varphi_1\longrightarrow\varphi_2$ の形のとき，この場合，問題を二つに分けて考える．

$\Pi\in\mathrm{Spec}(\Gamma)$ として

6.1)　$$(\varphi_1\longrightarrow\varphi_2)\in\Pi\Longrightarrow\Pi\in[\dot{\varphi}_1\longrightarrow\dot{\varphi}_2].$$

$(\varphi_1\longrightarrow\varphi_2)\in\Pi$ とすれば $U_{(\varphi_1\to\varphi_2)}$ は $\Pi$ の近傍である．さて $\varphi_1,\varphi_2$ に対しては帰納法の仮定で定理が証明されているから

$$\Pi_1\in U_{(\varphi_1\to\varphi_2)},\Pi_1\in[\dot{\varphi}_1]\Longrightarrow\varphi_2\in\Pi_1$$
$$\Longrightarrow\Pi_1\in[\dot{\varphi}_2]$$

となるから，次のことがいえる．

$$\Pi\in U_{(\varphi_1\to\varphi_2)}\subseteq[\dot{\varphi}_1]\longrightarrow[\dot{\varphi}_2]=[\dot{\varphi}_1\longrightarrow\dot{\varphi}_2].$$

これで証明が終ったが，ここで用いたことは開集合 $G_1,G_2,G_3$ について

$$G_1\cap G_2\subseteq G_3\Leftrightarrow G_1\subseteq(G_2\longrightarrow G_3)$$

であるが，これは開集合が直観論理に従うことを用いれば，$G_1,G_2\Longrightarrow G_3$ と $G_1\Longrightarrow(G_2\longrightarrow G_3)$ の同等性であって明らかである．

6.2)　$$\Pi\in[\dot{\varphi}_1\longrightarrow\dot{\varphi}_2]\Longrightarrow(\varphi_1\longrightarrow\varphi_2)\in\Pi.$$

$\Pi\in[\dot{\varphi}_1\longrightarrow\dot{\varphi}_2]$ とすれば，$\Pi$ の近傍 $U_\psi$ をとれば $U_\psi\subseteq[\dot{\varphi}_1\longrightarrow\dot{\varphi}_2]$ となる．

上の $G_1,G_2,G_3$ についての注意とを考えれば

6.2.1)　$$U_\psi\cap[\dot{\varphi}_1]\subseteq[\dot{\varphi}_2].$$

いま $\Pi,\psi\Longrightarrow\varphi_1\longrightarrow\varphi_2$ が証明できることをいおう．もしそうでないとすれば，もちろん $\Pi,\psi,\varphi_1\Longrightarrow\varphi_2$ も証明できない．したがって定理4によって $\Pi$ を $\Pi'\in\mathrm{Spec}(\Gamma)$ なる $\Pi'$ に拡大して $\varphi_1,\psi\in\Pi'$ であるか $\varphi_2\notin\Pi'$ であるようにできる．

これは $\varphi_1, \varphi_2$ についての帰納法の仮定を用いれば

$$U_\psi \cap [\dot{\varphi}_1] \not\subseteq [\dot{\varphi}_2]$$

を意味するから上の式 6.2.1）と矛盾する．したがって

$$\Pi, \psi \Longrightarrow \varphi_1 \longrightarrow \varphi_2$$

がいえた．$U_\psi$ は $\Pi$ の近傍，すなわち $\psi \in \Pi$ だから $\Pi \Longrightarrow \varphi_1 \longrightarrow \varphi_2$ が証明できて，$\varphi_1 \longrightarrow \varphi_2 \in \Pi$ となる．

7）$\varphi$ が $\neg\psi$ であるとき．

今後便利だから矛盾を表わす式を $\perp$ とする．例えば $\perp$ は $c \neq c$ と思ってもよい．直観論理で $\neg\psi$ と $\psi \longrightarrow \perp$ とは同等だからこれは 6）に還元される．

8）$\varphi$ が $\exists x(\mathrm{E}x \wedge \psi(x))$ のとき

$$\begin{aligned}[\exists x(\mathrm{E}x \wedge \dot{\psi}(x))] &= \bigcup_s [\mathrm{E}\dot{s} \wedge \dot{\psi}(\dot{s})] \\ &= \bigcup_s \{\Pi | \mathrm{E}s \wedge \psi(s) \in \Pi\} \\ &= \{\Pi | \exists x(\mathrm{E}x \wedge \psi(x)) \in \Pi\}.\end{aligned}$$

最後の = は $\Pi$ が Henkin 的であることを用いた．

9）$\varphi$ が $\forall x(\mathrm{E}x \longrightarrow \psi(x))$ のとき

$$\begin{aligned}[\forall x(\mathrm{E}x \longrightarrow \dot{\psi}(x)] &= \bigwedge_s [\mathrm{E}\dot{s} \longrightarrow \dot{\psi}(\dot{s})] \\ &= \bigwedge_s [\mathrm{E}s \longrightarrow \psi(s)] \\ &= [\forall x(\mathrm{E}x \longrightarrow \psi(x))].\end{aligned}$$

さてこの定理を用いて完全性定理を導きだそう．まず $\Gamma$ が無矛盾な theory として上の $\mathcal{S}^*$ および $\dot{\mathcal{S}}$ を作ることにする．いま $\varphi \in \Gamma$ なる $\varphi$ をとれば定理により

$$\begin{aligned}[\dot{\varphi}]_{\mathcal{S}} &= \{\Pi \in \mathrm{Spec}(\Gamma) | \varphi \in \Pi\} \\ &= \mathrm{Spec}(\Gamma) \qquad (\varphi \in \Gamma \text{ だから})\end{aligned}$$

となって $\dot{\mathcal{S}}$ が $\Gamma$ のモデルになっている．すなわち $\Gamma$ のすべての sentence は $\dot{\mathcal{S}}$ で成立していることがわかる．

このことから完全性定理が出ることは次のようにわかる．いま $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$

$\Longrightarrow \psi$ なる式が証明できなかったとする．このとき $\Gamma=\phi$ とおいて，Spec($\Gamma$) を考えれば，定理4によって $\Pi \in \mathrm{Spec}(\Gamma)$ で $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi) \notin \Pi$ なる $\Pi$ が存在する．したがって

$$[(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi)]_{\mathfrak{s}} \neq \mathrm{Spec}(\Gamma)$$

となって，$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \longrightarrow \psi$ が，したがって $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \Longrightarrow \psi$ がすべての構造で成立していないことがわかる．ここで $\Longrightarrow$ の右辺が空であるときは上の議論で $\psi$ を $\perp$ だと思えばよい．

# 第5章　高階直観論理

## 1. 高階直観論理体系

ここでのべる高階直観論理は第4章でのべた直観論理のタイプに多少の条件をつけてそれに関して新しい公理をふやすだけであるから本質的に新しいものではない.

**定義**　タイプの集合 $\mathcal{T}$ が高階のタイプであるということを次の条件がみたされていることとする.

$A_1, \cdots, A_n$ がタイプのとき $[A_1, \cdots, A_n]$ もまたタイプである.

ここに $n=0$ の特別の場合も考えてその場合にできたタイプを口で表わすことにする.

後に [ ,…, ] に関する新しい公理を付加えるので論理体系から矛盾が出ないためには次のような条件をつけておいた方がよい.

いま $A=[A_1, \cdots, A_n]$ とするとき $A_i<A(i=1, \cdots, n)$ と定義して $A_1<A_2<\cdots<A_k$ $(k>1)$ なる列があるとき一般に $A_1<A_k$ が成立しているということにする. このとき $A<A$ が絶対に生じない. しかし以下にはこういう条件を余り神経質にウルサクはいわないことにする. いつでもついているものと思ってくれてもよいし, 矛盾が出ても平気だと思ってくれてもよい.

タイプに上のような特別な関数 [ ,…, ] がついている他は高階直観論理は普通の直観論理と殆んど同じと思ってよい. ただ次の点を変えるのである.

1)　矛盾を表わす記号 ⊥ を導入する. これに対する論理的な公理として次の式を導入する.

$$\bot \Rightarrow$$

2)　term の構成に次のものをいれる.

$a_1, \cdots, a_n$ がそれぞれタイプが $A_1, \cdots, A_n$ の自由変数で $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ が formula ならば $\{x_1, \cdots, x_n|\varphi(x_1, \cdots, x_n)\}$ はタイプが $[A_1, \cdots, A_n]$ の term である. $n=0$ の特別な場合として $\{|\varphi\}$ はタイプ□の term である.

3)　formula の構成に次のものをいれる.

$s$ がタイプ $[A_1, \cdots, A_n]$ の term で $t_1, \cdots, t_n$ がそれぞれタイプが $A_1, \cdots, A_n$ の term とするとき, $s(t_1, \cdots, t_n)$ は formula である.

特別な場合として $s$ がタイプ□のときは $s(\ )$ は formula である.

4)　新しい公理として次のものを今までの公理に付加える.

もちろん我々は正規な formula だけ考えていることをまたもう一度注意しておく.

4.1)
$$\mathrm{E}\{x_1, \cdots, x_n|\varphi(x_1, \cdots, x_n)\}.$$

この特別な場合として次の形がえられる.

$$\mathrm{E}\{|\varphi\}.$$

4.2)
$$s(t_1, \cdots, t_n) \Longrightarrow \mathrm{E}s \wedge \mathrm{E}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{E}t_n.$$

4.3)
$$\mathrm{E}s,\ s=\{x_1, \cdots, x_n|\varphi(x_1, \cdots, x_n)\},\ \mathrm{E}t_1, \cdots, \mathrm{E}t_n \\ \Longrightarrow \varphi(t_1, \cdots, t_n) \longleftrightarrow s(t_1, \cdots, t_n).$$

ここに $\varphi \longleftrightarrow \psi$ は $(\varphi \longrightarrow \psi) \wedge (\psi \longrightarrow \varphi)$ の略である.

4.4)
$$\mathrm{E}s,\ \forall x_1 \cdots x_n(\mathrm{E}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{E}x_n \longrightarrow (\varphi(x_1, \cdots, x_n) \longleftrightarrow s(x_1, \cdots, x_n))) \\ \Longrightarrow s=\{x_1, \cdots, x_n|\varphi(x_1, \cdots, x_n)\}.$$

ここに $\forall x_1 \cdots x_n(\mathrm{E}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{E}x_n \longrightarrow \cdots$ は本当は $\forall x_1(\mathrm{E}x_1 \longrightarrow \forall x_2(\mathrm{E}x_2 \longrightarrow (\cdots$ という風にかくべきなのだが, 同じことであるから今後上のような省略記号を用いるものとする.

4.1), 4.2), 4.3), 4.4) は全体として普通論理学でいう所の comprehension axiom に相当している.

さて以上が我々の論理体系である. この体系にはタイプ□の変数があるため, 色々と変ったことができるのである. それを少しばかりやることにする.

まずタイプ□の束縛変数を $x^{\square}, y^{\square}, z^{\square}, \cdots$ で表わすことにしよう.

もちろん $a, b, c, \cdots$ や $x, y, z, \cdots$ もタイプ□の変数としても用いる. それから $\forall x^{\square}\varphi(x)$ のように $\forall x^{\square}$ のあとはいちいち $x^{\square}$ とかかなくて単に $x$ とかいたりする.

最初にタイプ□についての性質を調べることにする. 先ず $\perp \longrightarrow \perp$ を $T$ と省略する. $T$ はもちろん formula で真を表わす.

1)
$$\vdash \varphi \longleftrightarrow \{|\varphi\} = \{|T\}.$$

これは 4.3) から $\{|T\} = \{|\varphi\} \Longrightarrow \varphi \longleftrightarrow T$.

4.4) から $\varphi \longleftrightarrow T \Longrightarrow \{|T\} = \{|\varphi\}$ が出る.

2)
$$\vdash (\varphi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow \{|\varphi\} = \{|\psi\}.$$

1) と同様にやればよい.

3)
$$\vdash \varphi \longleftrightarrow \{|\varphi\}(\ ).$$

これは 4.3) の特別な場合である.

以上によって, いつでも formula $\varphi$ は $\{|\varphi\}(\ )$ と表わすことができる. したがって

$$\frac{F(\cdots, \varphi, \cdots, \varphi, \cdots), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\forall z^{\square} F(\cdots, z(\ ), \cdots, z(\ ), \cdots), \Gamma \Longrightarrow \Delta}$$

という推論が許されることになる.

このように formula は特別なタイプ□の term と同一視することができるが, タイプ□の term $s$ は必ずしも formula と同一視することはできない. E$s$ が成立するときにだけできると思ってよい. これを式で表わせば

4)
$$\mathrm{E}s, s = \{|\varphi\}(\ ) \Longrightarrow \varphi \longleftrightarrow s(\ ).$$

これは 4.3) の特別な場合である.

5)
$$\mathrm{E}s, \varphi \longleftrightarrow s(\ ) \Longrightarrow s = \{|\varphi\}.$$

これは 4.4) の特別の場合である.

したがってタイプ□の term は formula よりは範囲が広く E$s$ なる $s$ だ

けが formula に対応すると思えばよい.

最初に ∨ と ∃ と ⌐ が ⟶, ∧, ∀, ⊥ で表わされることをいう.

1)　$\neg\varphi$ は $\varphi \longrightarrow \bot$ と表わされる.

これは論理的推論で調べれば次の如くである.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow D \qquad \bot \Rightarrow}{D \longrightarrow \bot, \Gamma \Rightarrow} \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{D, \Gamma \Rightarrow}{D, \Gamma \Rightarrow \bot}}{\Gamma \Rightarrow D \longrightarrow \bot}$$

2)　$\varphi \vee \psi$ は $\forall z^{\square}((\varphi \longrightarrow z(\ )) \wedge (\psi \longrightarrow z(\ )) \longrightarrow z(\ ))$ で表わされる.

以下に式はいつでも $\Gamma \Rightarrow \varphi$ の形とする. もし $\varphi$ の所が本当は空であれば $\varphi$ の所を ⊥ でおきかえればよい. 次に ∨ の推論図を上のおきかえで出すことにする.

2.1)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow O}{\Gamma \Rightarrow \varphi \longrightarrow O} \qquad \cfrac{\psi, \Gamma \Rightarrow O}{\Gamma \Rightarrow \psi \longrightarrow O}}{\Gamma \Rightarrow (\varphi \longrightarrow O) \wedge (\psi \longrightarrow O)} \qquad O \Rightarrow O}{(\varphi \longrightarrow O) \wedge (\psi \longrightarrow O) \longrightarrow O, \Gamma \Rightarrow O}}{\forall z^{\square}((\varphi \longrightarrow z(\ )) \wedge (\psi \longrightarrow z(\ )) \longrightarrow z(\ )), \Gamma \Rightarrow O}$$

2.2)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \varphi \qquad a(\ ) \Rightarrow a(\ )}{\varphi \longrightarrow a(\ ), \Gamma \Rightarrow a(\ )}}{(\varphi \longrightarrow a(\ )) \wedge (\psi \longrightarrow a(\ )), \Gamma \Rightarrow a(\ )}}{\Gamma \Rightarrow ((\varphi \longrightarrow a(\ )) \wedge (\psi \longrightarrow a(\ )) \longrightarrow a(\ ))}}{\Gamma \Rightarrow \forall z^{\square}((\varphi \longrightarrow z(\ )) \wedge (\psi \longrightarrow z(\ )) \longrightarrow z(\ ))}$$

($a$ はタイプロ)

3)　$\exists x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x))$ は $\forall z^{\square}(\forall x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x) \longrightarrow z(\ )) \longrightarrow z(\ ))$ と表わされる.

3.1)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathrm{E}a \wedge \varphi(a), \Gamma \Rightarrow O}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{E}a \wedge \varphi(a) \longrightarrow O}}{\Gamma \Rightarrow \forall x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x) \longrightarrow O) \qquad O \Rightarrow O}}{\forall x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x) \longrightarrow O) \longrightarrow O, \Gamma \Rightarrow O}}{\forall z^{\square}(\forall x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x) \longrightarrow z(\ )) \longrightarrow z(\ )), \Gamma \Rightarrow O}$$

ここで $\forall x(\mathrm{E}x \wedge \varphi(x) \longrightarrow \qquad )$ は本当は $\forall x(\mathrm{E}x \longrightarrow (\varphi(x) \longrightarrow \qquad ))$ とすべきであるが同等なことは明らかであるからこのように省略した.

3.2)

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{E}t\wedge\varphi(t) \qquad \dfrac{\mathrm{E}t\wedge\varphi(t) \Rightarrow \forall x(\mathrm{E}x\wedge\varphi(x) \longrightarrow b(\ )) \longrightarrow b(\ )}{\mathrm{E}t\wedge\varphi(t) \Rightarrow \forall z^{\square}(\forall x(\mathrm{E}x\wedge\varphi(x) \longrightarrow z(\ )) \longrightarrow z(\ ))}}{\Gamma \Rightarrow \forall z^{\square}(\forall x(\mathrm{E}x\wedge\varphi(x) \longrightarrow z(\ )) \longrightarrow z(\ ))}$$

ここでちょっと注意すれば $b$ はタイプ□であって，また，

$$\mathrm{E}t\wedge\varphi(t) \Rightarrow \forall x(\mathrm{E}x\wedge\varphi(x) \longrightarrow b(\ )) \longrightarrow b(\ )$$

は容易に証明できる式である．

次に我々は $\varphi \longleftrightarrow \psi$ を $(\varphi \longrightarrow \psi)\wedge(\psi \longrightarrow \varphi)$ と考えたが，逆に $\longleftrightarrow$ を基本的な論理記号と考えて $\varphi \longrightarrow \psi$ を $\wedge$ と $\longleftrightarrow$ で表わすことができる．これを注意しよう．まず $\longleftrightarrow$ についての推論図を導入する．

$\longleftrightarrow$ 左
$$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Pi \Rightarrow \psi}{\varphi \longleftrightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta}$$

右
$$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \psi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \longleftrightarrow \psi}$$

これをもとにして $\longrightarrow$ は $\wedge$ と $\longleftrightarrow$ で表わせる．

4) $\varphi \longrightarrow \psi$ は $(\varphi\wedge\psi) \longleftrightarrow \varphi$ で表わせる．

4.1)
$$\dfrac{\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \psi \qquad \varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \varphi\wedge\psi} \qquad \varphi\wedge\psi \Rightarrow \varphi}{\Gamma \Rightarrow (\varphi\wedge\psi) \longleftrightarrow \varphi}$$

4.2)
$$\dfrac{\dfrac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \Pi \Rightarrow \varphi}{(\varphi\wedge\psi) \longleftrightarrow \varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta}$$

以上によって $\perp, \wedge, \longrightarrow, \forall$ を基本的論理記号ととってもよいし，また $\perp, \wedge, \longleftrightarrow, \forall$ を基本的論理記号ととってもよいことがわかった．

今後 $\forall x(\mathrm{E}x \longrightarrow\quad)$ と $\exists x(\mathrm{E}x\wedge\quad)$ の使用が余りにも多いのでこれらをそれぞれ $\forall^{\cdot}x$ および $\exists^{\cdot}x$ と省略することにする．

次に $\mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b \longrightarrow a=b \Rightarrow a=b$ と次の形の式とが同等なことを証明しておく．

$$\forall^{\cdot}x(x=a \longleftrightarrow x=b) \Rightarrow a=b.$$

まず後者を仮定して前者を出す．証明すべきものを最初にかいてそれを順順にホドイて行ってわかり切ったものにすればよい．

$$\mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b\longrightarrow a=b\Rightarrow\forall^{\cdot}x(x=a\longleftrightarrow x=b),$$

$$\mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b\longrightarrow a=b\Rightarrow\mathrm{E}c\longrightarrow(c=a\longleftrightarrow c=b),$$

$$\mathrm{E}c,\ \mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b\longrightarrow a=b\Rightarrow c=a\longleftrightarrow c=b,$$

$$\mathrm{E}c,\ c=a,\ \mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b\longrightarrow a=b\Rightarrow c=b,$$

$$c=a,\ a=b\Rightarrow c=b\quad\text{および}\quad\mathrm{E}c,\ c=a\Rightarrow\mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b.$$

次に前者を仮定して後者を出す．同じく順々にカンタンなものへとホドイて行く．

$$\forall^{\cdot}x(x=a\longleftrightarrow x=b)\Rightarrow\mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b\longrightarrow a=b,$$

$$\mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b,\ \forall^{\cdot}x(x=a\longleftrightarrow x=b)\Rightarrow a=b,$$

$$\mathrm{E}a,\ \forall^{\cdot}x(x=a\longleftrightarrow x=b)\Rightarrow a=b,$$

$$\mathrm{E}a,\ \mathrm{E}a\longrightarrow(a=a\longleftrightarrow a=b)\Rightarrow a=b.$$

## 2. 論理からトポスへ

いま高階直観論理を考えそこの無矛盾な theory を一つとって $\mathcal{T}$ とする．

$\mathcal{T}$ が記号的に閉じているということを次の条件によって定義する．

$s$ がタイプ $[A_1, \cdots, A_n]$ の closed term であるとき，次の条件をみたすようなタイプ $B$ とタイプ $[B, A_1, \cdots, A_n]$ の closed term $t$ とが存在する．

1)　$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}y_1\cdots\forall^{\cdot}y_n(\exists^{\cdot}x\ t(x, y_1, \cdots, y_n)\longleftrightarrow s(y_1, \cdots, y_n))$.

2)　$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}x\exists^{\cdot}y_1\cdots\exists^{\cdot}y_n(t(x, y_1, \cdots, y_n)$
$$\wedge\forall^{\cdot}z_1\cdots\forall^{\cdot}z_n(t(x, z_1, \cdots, z_n)\longrightarrow y_1=z_1\wedge\cdots\wedge y_n=z_n)).$$

3)　$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}y_1\cdots\forall^{\cdot}y_n\forall^{\cdot}w\forall^{\cdot}x(t(x, y_1, \cdots, y_n)$
$$\wedge t(w, y_1, \cdots, y_n)\longrightarrow x=w).$$

以下にこの $B$ のことを $s$ からできるタイプ，$t$ のことを $B$ と $s$ との関係を表わす term ということにする．

一つの theory $\mathcal{T}$ があたえられたときに，$\mathcal{T}$ に必要な新しいタイプと新しい定数記号と新しい sentence を導入して $\mathcal{T}^*$ に拡大して $\mathcal{T}^*$ を記号的

に閉じているようにすることはなんでもない.

例えば，上のタイプ $[A_1, \cdots, A_n]$ の closed term $s$ があたえられたときには，新しいタイプ $B$ と新しい定数記号 $c$ とを導入した上で新しい $\mathcal{T}$ に付加えるべき sentence を

$$\forall^{\cdot} y_1 \cdots \forall^{\cdot} y_n (\exists^{\cdot} x \; c(x, y_1, \cdots, y_n) \longleftrightarrow s(y_1, \cdots, y_n))$$

とすればよいからである.

ところでこの $\mathcal{T}^*$ は形式的には $\mathcal{T}$ の拡大であるが実際には $\mathcal{T}$ と同じものと考えられる．その理由は上のようにタイプ $B$ と $c$ をふやしたときに，

$x$ のタイプが $B$ のときに

$\forall^{\cdot} x$ を $\forall^{\cdot} y_1 \cdots \forall^{\cdot} y_n (s(y_1, \cdots, y_n) \longrightarrow \quad)$ にかえる，

$\exists^{\cdot} x$ を $\exists^{\cdot} y_1 \cdots \exists^{\cdot} y_n (s(y_1, \cdots, y_n) \wedge \quad)$ にかえる.

いまこの手続きで $x$ に対応するものを $y_1 \cdots y_n$ で，$x'$ に対応するものを $y_1' \cdots y_n'$ とするとき

$c(x, z_1, \cdots, z_n)$ を $s(y_1, \cdots, y_n) \wedge s(z_1, \cdots, z_n) \wedge y_1 = z_1 \wedge \cdots \wedge y_n = z_n$ にかえる，

$\mathrm{E}x$ を $\mathrm{E}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{E}y_n \wedge s(y_1, \cdots, y_n)$ にかえる，

$x = x'$ を $y_1 = y_1' \wedge \cdots \wedge y_n = y_n' \wedge s(y_1, \cdots, y_n) \wedge s(y_1', \cdots, y_n')$ にかえる

という風にすべて $\mathcal{T}$ の対応する概念にかえてしまうことができるからである.

theory として同じものであるから，$\mathcal{T}$ の代りに $\mathcal{T}^*$ をとって，今後 $\mathcal{T}$ はいつでも記号的に閉じていると考えてよい訳である.

さて $\mathcal{T}$ を無矛盾で記号的に閉じている theory として，$\mathcal{T}$ から圏 $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ を次のように作る.

1. $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ の対象は $\mathcal{T}$ のタイプである.

2. $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ の対象（すなわち $\mathcal{T}$ のタイプ）$A, B$ があたえられたときに $s : A \longrightarrow B$ なる射を $[A, B]$ なる closed term であって，次の条件をみたしているものとする.

2.1.
$$\mathcal{T}\vdash \mathrm{E}s.$$

2.2.
$$\mathcal{T}\vdash \forall^{\cdot}x\,\exists^{\cdot}!y\ s(x, y).$$

ここに $x$ のタイプは $A$, $y$ のタイプは $B$ であって,

$$\exists^{\cdot}!y\varphi(y)\ \text{は}\ \exists^{\cdot}y(\varphi(y)\wedge\forall^{\cdot}z(\varphi(z)\longrightarrow y=z))\ \text{の略である}$$

とする.

いま $s\colon A\longrightarrow B$ なる射と $t\colon A\longrightarrow B$ なる射があったときに, $s$ と $t$ とが同じ射であることを $s\approx t$ で表わし $\mathcal{T}\vdash s=t$ で定義する.

3. $s\colon A\longrightarrow B$ が射で $t\colon B\longrightarrow C$ が射のとき, $t\circ s$ を

$$\{x, z\,|\,\exists^{\cdot}y(s(x, y)\wedge t(y, z))\}$$

で定義する. $t\circ s\colon A\longrightarrow C$ なる射であることは容易に証明される.

この定義によって $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ が圏になることは明らかであろう.

いま射であるような closed term を $f, g, h, \cdots$ で表わすことにしよう. このとき

$$b=f(a)\ \text{を}\ f(a, b)\ \text{の省略記号である}$$

と考えることにすれば, 我々は丁度次の性質がみたされているように思って推論して差支えない.

1)
$$\mathcal{T}\vdash \forall^{\cdot}x\mathrm{E}f(x).$$

2)
$$\mathcal{T}\vdash(b=f(a)\longrightarrow \mathrm{E}a\wedge\mathrm{E}b).$$

また §1 の 4.4) によって $f\approx g$ である必要十分条件は

$$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}x\forall^{\cdot}y(y=f(x)\longleftrightarrow y=g(x))$$

となるから $f\approx g$ は $\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}x(f(x)=g(x))$ のことだと思っても差支えない.

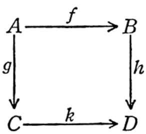
さて我々は $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ がトポスであることを順々に証明して行こう. 変数のタイプは自明のときは指定しない.

**補題**　$\mathcal{T}$ を無矛盾で記号的に閉じた theory とする. そのとき $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ で次のことが成立する.

1)　$f\colon A\longrightarrow B$ が mono ということは次のことと同等である.

$$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}x\forall^{\cdot}y(f(x)=f(y)\longrightarrow x=y).$$

2)　もし $h\circ f=k\circ g$ とすれば右の図が p.b. ということと次のこととは同等である.




$$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}x\forall^{\cdot}y(h(x)=k(y)\longrightarrow\exists^{\cdot}!z(x=f(z)\wedge y=g(z))).$$

3)　$A$ が終対象だということは次のことと同等である.

$$\mathcal{T}\vdash\exists^{\cdot}!x(x=x).$$

ここに $x$ のタイプは $A$ である.

4)　$A\xleftarrow{\pi_1}C\xrightarrow{\pi_2}B$ が直積であることは次のことと同等である.

$$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}x\forall^{\cdot}y\exists^{\cdot}!z(\pi_1(z)=x\wedge\pi_2(z)=y).$$

証明）　すべての場合に論理的概念から圏の概念の方を出すのはトリビアルである. したがって圏の概念の方から論理的概念の方を出すことだけを証明しよう.

1)　$\mathcal{T}$ は記号的に閉じているから, $\{y,z|f(y)=f(z)\}$ を考えて, この term からできるタイプを $B$, この term と $B$ との関係を表わす term を $c$ とする.

いま $g,h\colon B\longrightarrow A$ を次の式で定義する.

$$g=\{x,y|\exists^{\cdot}!z\ c(x,y,z)\},$$
$$h=\{x,z|\exists^{\cdot}!y\ c(x,y,z)\}.$$

明らかに $f\circ g=f\circ h$ になるから $f$ が mono のことから $g=h$, すなわち

$$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}x\forall^{\cdot}u(\exists^{\cdot}!z\ c(x,u,z)\longleftrightarrow\exists^{\cdot}!y\ c(x,y,u)).$$

これをかき直せば

$$\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}y\forall^{\cdot}z(f(y)=f(z)\longrightarrow\forall^{\cdot}u(u=y\longleftrightarrow u=z)),$$

すなわち $\mathcal{T}\vdash\forall^{\cdot}y\forall^{\cdot}z(f(y)=f(z)\longrightarrow y=z)$ が得られた.

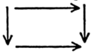
2)　$\mathcal{T}$ は記号的に閉じているから $\{y,z|h(y)=k(z)\}$ を表わすタイプ $E$ と, この term と $E$ との関係を表わす term $c$ が存在する. いま次の定義をする.

$f' : E \longrightarrow B$ を $f' = \{x, y \mid \exists^{\cdot} z\ c(x, y, z)\}$ とする.

$g' : E \longrightarrow C$ を $g' = \{x, z \mid \exists^{\cdot} y\ c(x, y, z)\}$ とする.

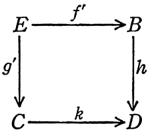
$c$ と $f', g'$ の作り方から明らかに

$$\mathcal{T} \vdash \forall^{\cdot} y, z(h(y) = k(z) \longrightarrow \exists^{\cdot}! x(f'(x) = y \wedge g'(x) = z))$$

であって, また $h \circ f' = k \circ g'$ となるから,  が p. b. であることから $i: E \longrightarrow A$ なる射 $i$ があって

$$f' = f \circ i, \quad g' = g \circ i.$$

またこの




が p. b. であることも明らかである.

このことから, $\mathcal{T} \vdash \forall^{\cdot} y, z(h(y) = k(z) \longrightarrow \exists^{\cdot} x(f(x) = y \wedge g(x) = z))$ であることがわかる. この $x$ が唯一通りに定まることをいうためには, $\{x_1, x_2 \mid f(x_1) = f(x_2) \wedge g(x_1) = g(x_2)\}$ なる term を考えて 1) と同じようにやればよい.

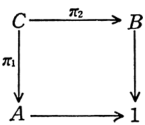
3) 前に定義したように $T$ は $\bot \longrightarrow \bot$ である. $\mathcal{T}$ は記号的に閉じているから $\{x \mid x = \{\mid T\}\}$ を表わすタイプがある. これを今後 1 とかくことにする. 明らかに次の式が成立する.

$$\mathcal{T} \vdash \exists^{\cdot}! x : 1(x = x).$$

ここに $x : 1$ は前にものべたが $x$ がタイプ 1 の変数であることを示す記号である. ところですべての終対象は同等であるから

$$\mathcal{T} \vdash \exists^{\cdot}! x : A(x = x)$$

が得られた.




4) 右の図をみてみると明らかにこれは p. b. になっている. したがって, 4) は 2) から出てくる.

**定理 1**　$\mathcal{T}$ が記号的に閉じていれば $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ はトポスである.

証明）　補題の証明によって p. b. の存在および1の存在がわかった．したがって直積の存在もいえるが，直積は次のように直接にも定義できる.

$\mathcal{T}$ が記号的に閉じているから，$x: A, y: B$ として $\{x, y|\mathrm{E}x\wedge \mathrm{E}y\}$ を表わすタイプ $C$ と，この term と $C$ との関係を表わす term $c$ が存在する．今後このタイプ $C$ のことを $A\times B$ で表わすことにする．$\pi_1, \pi_2$ を

$$\pi_1=\{z, x|\ \exists^{\cdot}y\ \ c(z, x, y)\},\qquad \pi_2=\{z, y|\ \exists^{\cdot}x\ \ c(z, x, y)\}$$

で表わせば，$A\times B, \pi_1, \pi_2$ が求めるものであることは明らかであろう.

以後この状況での $c(z, x, y)$ なる $z$ のことを $\langle x, y\rangle$ と表わすことにしよう．$\mathcal{T}\vdash \forall^{\cdot}x\forall^{\cdot}y\mathrm{E}\langle x, y\rangle$ が成立するものと思ってよい．もちろん $x$: $A, y$: $B, \langle x, y\rangle$: $A\times B$ である.

次に $B^A$ を考えることにする．$x: A, y: B$ として $\{X|\ \forall^{\cdot}x\ \exists^{\cdot}!y\ \ X(x, y)\}$ なる term を表わすタイプを $B^A$ と表わし，$B^A$ とこの term との関係を表わす term を $c$ とする．このとき $\mathrm{ev}: A\times B^A\longrightarrow B$ および $f: A\times C\longrightarrow B$ に対する $\hat{f}$: $C\longrightarrow B^A$ は次の如くあたえられる.

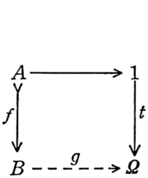
$$\mathrm{ev}=\{w, y|\ \exists^{\cdot}X(c(\pi_2(w), X)\wedge X(\pi_1(w), y))\},$$

$$\hat{f}=\{x, y|\ \forall^{\cdot}w, z(\ \exists^{\cdot}v(c(y, v)\wedge v(w, z))\longleftrightarrow f(\langle w, x\rangle, z))\}.$$

最後に $\Omega$ のことを考えよう．□のことを $\Omega$ とかくことにしよう．そして $t: 1\longrightarrow \Omega$ を

$$t=\{x, y|y(\ )\}$$

によって定義する.




右の図で $f$ をあたえられたときの $g$ は

$$g=\{y, z|z(\ )\longleftrightarrow\ \exists^{\cdot}x(f(x)=y)\}$$

であたえられる.

このとき上の図が p. b. になっていることは上の補題の 2) から明らかで

あろう.

## 3. トポスから論理へ

前に基本的な論理記号が $\perp, \wedge, \longrightarrow, \forall$ でよいことをのべたが，ここで更に $\perp$ を $\forall$ を用いてとり去ることにする.

$$\perp \text{ を } \forall^{\cdot} z(z(\ ))$$

と定義する.

いま我々はこの定義で $\perp$ の性質がみたされることをいえばよい. このために我々は次の規約をする.

$\Gamma \Longrightarrow$ 　は $\Gamma \Longrightarrow \perp$ の省略であるとする. こうすると $\perp$ の性質 $\perp \Longrightarrow$ は $\perp \Longrightarrow \perp$ となって当り前になってしまう. その代り次のものを証明しなければならない.

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \perp}{\Gamma \Longrightarrow \varphi} \qquad \varphi \text{ は任意の formula.}$$

これを次のように証明する.

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \forall^{\cdot} z(z(\ )) \qquad \dfrac{\varphi \Longrightarrow \varphi}{\forall^{\cdot} z(z(\ )) \Longrightarrow \varphi}}{\Gamma \Longrightarrow \varphi}$$

したがって以後 $\wedge, \longrightarrow, \forall$ を基本的な論理記号と考えることにする.

次にもう一つ月並な注意をしておく. いま E, = 以外の関係記号 $R(,\cdots,)$ があたえられて，そのタイプが $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ であったとする. そのとき $R$ をタイプが $[A_1, \cdots, A_n]$ の定数記号だと思えばよい. したがって E, = 以外の関係記号はないものだと思ってよい.

更に関数記号 $F$ があたえられていて，そのタイプが $\langle A_1, \cdots, A_n \rangle$ と $A$ との組であったとする. このとき $F$ はタイプが $\langle A_1, \cdots, A_n, A \rangle$ なる関係記号で $\forall^{\cdot} x_1 \cdots x_n \exists^{\cdot} ! y\ R(x_1, \cdots, x_n, y)$ をみたすものだと思ってよい. したがってこれは関係記号でおきかえて更に上の手続きでとり去ってしまえばよい.

したがって今後は高階直観論理の言語は，変数，定数記号，$\longrightarrow, \wedge, \forall$, E,

$=$ だけからできているものと思ってよい.

次にトポスにおいて $\wedge : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ なる射を次の図によって定義する.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle\langle t,t\rangle}\downarrow & \text{p. b.} & \downarrow{\scriptstyle t} \\ \Omega\times\Omega & \overset{\wedge}{\dashrightarrow} & \Omega \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle\langle\Omega,\Omega\rangle}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ \Omega\times\Omega & \overset{\longleftrightarrow}{\dashrightarrow} & \Omega \end{array}$$

また我々は $\longleftrightarrow : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ なる $\longleftrightarrow$ を $\longleftrightarrow = (=_\Omega)$ によって定義する. すなわち右上の図である.

また $\longrightarrow : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ を

$$\longrightarrow = (\longleftrightarrow \circ < \wedge, \pi_1 >)$$

によって定義する. この定義の意味は前に $\longrightarrow$ を $\longleftrightarrow$ と $\wedge$ で表わした仕方から明らかであろう.

さてここで, 第3章§1の終りの所を思い出してほしい. そこで, 任意の $(f, d) : A \longrightarrow B, d : A' \rightarrowtail A$ に対して

$$\begin{array}{ccc} A' & \overset{f}{\longrightarrow} & B \\ {\scriptstyle d}\downarrow & \text{p.b.} & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ A & \overset{\tilde{f}}{\dashrightarrow} & \tilde{B} \end{array}$$

なる $\tilde{f}$ が唯一つ存在するような $B$ の partial map classifier $\eta_B$ が存在することを証明した.

いま我々はこの $\tilde{B}$ と $\eta_B$ を用いて

$$E^B : \tilde{B} \longrightarrow \Omega$$

を次の図によって定義する.

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & 1 \\ {\scriptstyle \eta_B}\downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \\ \tilde{B} & \overset{E^B}{\longrightarrow} & \Omega \end{array}$$

これはそこで証明された第3章定理4の 3) によって $\eta_B$ が mono であるから $E^B$ がきちんと定義されたことになっている.

さて $L$ を高階直観論理の言語として, $\mathcal{E}$ をトポスとする. いま $L$ のタイプの集りと $\mathcal{E}$ の対象の集りとが全く同じものであるとする.

但しここで $A_1, \cdots, A_n$ をタイプとして $[A_1, \cdots, A_n]$ なるタイプは $\mathcal{E}$ における $\Omega^{A_1\times\cdots\times A_n}$ のことであるとする. すなわち

$$[A_1, \cdots, A_n]=\Omega^{A_1\times\cdots\times A_n}.$$

いま $L$ の $\mathcal{E}$ における解釈があたえられているということを, $L$ のすべての定数記号 $c$ に対して

$$[c]:1\longrightarrow\tilde{A}$$

なる射があたえられていることとする. ここに $A$ は $c$ のタイプで, $\tilde{A}$ は $A$ の partial map classifier の $\tilde{A}$ であるとする.

すなわち解釈を一つきめるということはすべての $c$ に対して $[c]$ が何んであるかきめることである.

さて $a_1, \cdots, a_n$ が $L$ の相異なる変数であってそのタイプがそれぞれ $A_1, \cdots, A_n$ であるとする. このとき

$$(a_1, \cdots, a_n)=\tilde{A}_1\times\cdots\times\tilde{A}_n$$

と定義する. 特に $n=0$ の場合は1がその定義であるとする.

さて $L$ の $\mathcal{E}$ の中への解釈が一つきまっているとする. このとき $s$ をそのタイプが $A$ で, そのすべての自由変数を $a_1, \cdots, a_n$, また $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ をやはりそのすべての自由変数が $a_1, \cdots, a_n$ であるような formula であるとするとき, $s$ と $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ の $\mathcal{E}$ での解釈 $[s]$ および $[\varphi(a_1, \cdots, a_n)]$ を

$$[s]:(a_1, \cdots, a_n)\longrightarrow\tilde{A},$$

$$[\varphi(a_1, \cdots, a_n)]:(a_1, \cdots, a_n)\longrightarrow\Omega$$

となるように定義しよう. この定義を順々にやって行く.

$[c]$ は解釈としてもともとあたえられたもの,

$[a]=\mathrm{id}_{\tilde{A}}$　ここに $A$ は $a$ のタイプ.

さて $\Gamma=(a_1, \cdots, a_n)$, $\Delta=(b_1, \cdots, b_m)$ で, $b_1, \cdots, b_m$ は $a_1, \cdots, a_n$ の部分列であるとすると,

$$\pi_\Delta{}^\Gamma:\ (a_1, \cdots, a_n) \longrightarrow (b_1, \cdots, b_m)$$

という射影が自然に定義される.

$$[s=t]=(=_{\tilde{A}})\circ\langle[s]\circ\pi_{\Delta_1}{}^\Gamma, [t]\circ\pi_{\Delta_2}{}^\Gamma\rangle.$$

ここに $A$ は $s$ のタイプ, $\Gamma$ は $s, t$ に入っているすべての自由変数を $a_1, \cdots, a_n$ としたときの $(a_1, \cdots, a_n)$, $\Delta_1$ は $s$ に入っているすべての自由変数を $b_1, \cdots, b_r$ としたときの $(b_1, \cdots, b_r)$, $\Delta_2$ は $t$ に入っているすべての自由変数を $c_1, \cdots, c_s$ としたときの $(c_1, \cdots, c_s)$ とする.

$$[\mathrm{E}s]=E^A\circ[s] \qquad \text{ここに } A \text{ は } s \text{ のタイプ.}$$

さていま $a_1, \cdots, a_n, a$ のタイプをそれぞれ $A_1, \cdots, A_n, [A_1, \cdots, A_n]$ とする. このとき

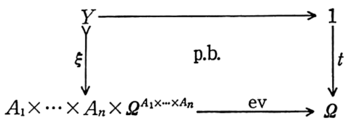
$$(a_1, \cdots, a_n, a)=\tilde{A}_1\times\cdots\times\tilde{A}_n\times\Omega^{A_1\times\cdots\times A_n}$$

$A_1 \longrightarrow \tilde{A}_1$, $\cdots$, $A_n \longrightarrow \hat{A}_n$, $\Omega^{A_1\times\cdots\times A_n} \longrightarrow \Omega^{A_1\times\cdots\times A_n}$ なる partial map classifier の積をつくれば

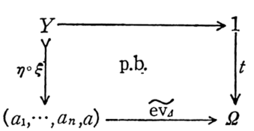
$$\eta:\ A_1\times\cdots\times A_n\times\Omega^{A_1\times\cdots\times A_n} \longrightarrow (a_1, \cdots, a_n, a)$$

を得る.

さて次の図の p. b. を作る.




この $\xi$ を用いて次の p. b. を作る.




これによって $\widetilde{\mathrm{ev}}_\Delta$ を定義する. ここに $\Delta=(a_1, \cdots, a_n, a)$ であるとする.

$$[s(t_1, \cdots, t_n)] = \widetilde{\mathrm{ev}}_{\Delta} \circ \langle [t_1] \circ \pi_{\Gamma_1}{}^{\Gamma}, \cdots, [t_n] \circ \pi_{\Gamma_n}{}^{\Gamma}, [s] \circ \pi_{\Gamma_0}{}^{\Gamma} \rangle$$

ここに $\Gamma$ は $s, t_1, \cdots, t_n$ 全部に入っている自由変数を $a_1, \cdots, a_n$ としたときの $(a_1, \cdots, a_n)$, $\Gamma_i$ は $t_i$ に入っている自由変数を $b_1, \cdots, b_{n_i}$ としたときの $(b_1, \cdots, b_{n_i})$, $\Gamma_0$ は $s$ に入っている自由変数を $c_1, \cdots, c_k$ としたときの $(c_1, \cdots, c_k)$ で, $\Delta$ は $\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n \times \Omega^{A_1 \times \cdots \times A_n}$ とする. ここに $A_i$ は $t_i$ のタイプとする.

$$[\varphi \wedge \psi] = \wedge \circ \langle [\varphi] \circ \pi_{\Delta_1}{}^{\Gamma}, [\psi] \circ \pi_{\Delta_2}{}^{\Gamma} \rangle,$$
$$\Delta_1 = (a_1, \cdots, a_n), \quad \Delta_2 = (b_1, \cdots, b_m).$$

$\Gamma = (c_1, \cdots, c_l)$ で $c_1, \cdots, c_l$ は $\varphi \wedge \psi$ のなかの自由変数, $a_1, \cdots, a_n$ は $\varphi$ のなかの自由変数, $b_1, \cdots, b_m$ は $\psi$ のなかの自由変数とする.

$$[\varphi \longrightarrow \psi] = \longrightarrow \circ \langle [\varphi] \circ \pi_{\Delta_1}{}^{\Gamma}, [\psi] \circ \pi_{\Delta_2}{}^{\Gamma} \rangle.$$

ここに $\Gamma, \Delta_1, \Delta_2$ は前と同じ.

次に $\Delta = (a, a_1, \cdots, a_n)$ とする. このとき

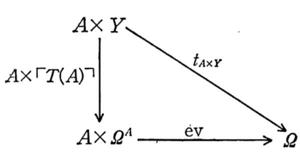
$$\eta_a : A \times (a_1, \cdots, a_n) \longrightarrow (a, a_1, \cdots, a_n)$$

を $\eta_A : A \longrightarrow \tilde{A}$ と $\mathrm{id}_{(a_1, \cdots, a_n)}$ の直積として作る. ここに $A$ は $a$ のタイプとする.

次に前と同じように $t_A$ を $A \longrightarrow 1 \xrightarrow{t} \Omega$ で定義して

$$\ulcorner T(A) \urcorner : Y \longrightarrow \Omega^A$$

を次の図で定義する.




更に $f : A \times Y \longrightarrow \Omega$ のとき $(\forall A)(f)$ を

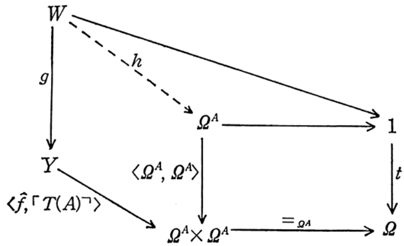
$$(\forall A)(f) = (=_{\Omega^A}) \circ \langle \hat{f}, \ulcorner T(A) \urcorner \rangle$$

で定義する. $[\forall x \varphi(x)]$ の定義をする前に $(\forall A)(f)$ についての補題を証明する.

**補題** すべての射 $g: W \longrightarrow Y$ について

$$((\forall A)f)\circ g = t_W \Longleftrightarrow f\circ(A\times g) = t_{A\times W}.$$

証明） 次のように図で順々に証明できる.




$$((\forall A)f)\circ g = t_W$$
$$\Longleftrightarrow \hat{f}\circ g = \ulcorner T(A)\urcorner \circ g \qquad (\langle \hat{f}, \ulcorner T(A)\urcorner\rangle \circ g = \langle h, h\rangle \text{ だから})$$
$$\Longleftrightarrow f\circ(A\times g) = (t_{A\times Y})\circ(A\times g)$$
$$= t_{A\times W}.$$

さていよいよ $[\forall x\varphi(x)]$ を定義しよう.

$$[\forall x\varphi(x)] = (\forall A)([\varphi(a)]\circ\eta_a).$$

ここで $A$ は $a$ のタイプ，すなわち $x$ のタイプで，$a$ は $\forall x\varphi(x)$ にない新しい自由変数であり，$\forall x\varphi(x)$ にある自由変数を $a_1, \cdots, a_n$ として，$\eta_a$ は $A\times(a_1, \cdots, a_n) \longrightarrow (a, a_1, \cdots, a_n)$ なる射である.

次に $[\{x_1, \cdots, x_n | \varphi(x_1, \cdots, x_n, b_1, \cdots, b_n)\}]$ の定義をするのであるが，単に式が長くなるだけのことだからここでは $\{x|\varphi(x, b)\}$ の場合を考える.

まず $x$ のタイプを $A$, $b$ のタイプを $B$ として

$$A\times\tilde{B} \xrightarrow{\eta_A\times\tilde{B}} \tilde{A}\times\tilde{B} \xrightarrow{[\varphi(a,b)]} \Omega$$

であるから

$$\varphi = [\varphi(a, b)]\circ(\eta_A\times\tilde{B})$$

によって $\varphi$ を定義し，その $\varphi$ のtranspose として

$$\hat{\varphi}: \tilde{B} \longrightarrow \Omega^A$$

を定義する.

我々の望む定義は次のものである.

$$[\{x|\varphi(x,b)\}]=\eta_{\Omega^A}\circ\hat{\varphi}.$$

いま $L$ の解釈 $\mathfrak{n}$ を $\mathcal{E}$ のなかで一つ固定したとする. このとき, $L$ の formula $\varphi(a_1,\cdots,a_n)$ に対して, $\mathfrak{n}\models\varphi(a_1,\cdots,a_n)$ を次のように定義する.

$$\mathfrak{n}\models\varphi(a_1,\cdots,a_n)\Leftrightarrow[\varphi(a_1,\cdots,a_n)]=t_{(a_1,\cdots,a_n)}.$$

$L$ の theory $\mathcal{T}$ に対して $\mathfrak{n}\models\mathcal{T}$ を次のことと定義する.

どんな $\mathcal{T}$ の公理 $\varphi$ をとっても $\mathfrak{n}\models\varphi$ が成立する.

**補題**　いま $s$ または $\varphi$ のすべての自由変数が $a_1,\cdots,a_m,c_1,\cdots,c_k$, $t$ のすべての自由変数が $b_1,\cdots,b_n$ で, $c_1,\cdots,c_k$ は $b_1,\cdots,b_n$ の部分列とする.

いま $s$ および $\varphi$ のなかの $b$ を全部 $t$ にかえてできるものをそれぞれ $s[t/b]$ および $\varphi[t/b]$ とかくことにすれば

$$[s[t/b]]=[s]\circ([t]\circ\pi^{(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)}_{(b_1,\cdots,b_n)}\times\pi^{(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)}_{(a_1,\cdots,a_m,c_1,\cdots,c_k)}).$$

$$[\varphi[t/b]]=[\varphi]\circ([t]\circ\pi^{(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)}_{(b_1,\cdots,b_n)}\times\pi^{(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)}_{(a_1,\cdots,a_m,c_1,\cdots,c_k)}).$$

今後, $[t/b]^{(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)}$ を上の二式の $\circ$ のあとのカッコの内部と定義する.

証明)　$s$ または $\varphi$ の構成についての帰納法で証明すればよい.

**定義**　$f:A\longrightarrow\Omega$ のとき $\|f\|$ を次で定義する.

$$\|f\|=\{g:B\longrightarrow A|f\circ g=t_B\}.$$

$g:B\longrightarrow A$ で $g\in\|f\|$ で $h:C\longrightarrow B$ ならばもちろん, $g\circ h\in\|f\|$ となる.

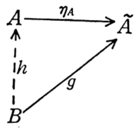
いま $L$ の解釈を一つ固定したときに次の定義をする.

$$\|\varphi\|=\|[\varphi]\|.$$

**補題**　$\|\varphi[t/b]\|=\{f|[t/b]^{(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)}\circ f\in\|\varphi\|\}.$

$\|E^At\|=\{f:B\longrightarrow(b_1,\cdots,b_n)|\eta_A$ が $[t]\circ f$ を割るもの$\}$.

ここで $\eta_A$ が $g:B\longrightarrow\tilde{A}$ を割るというのは次図が可換になるような $h$ が存在することである.




$$[\![ s=t ]\!]=\{f:\ B\longrightarrow(b_1,\cdots,b_n)|[s]\circ\pi_{\Delta_1}^{(b_1,\cdots,b_n)}\circ f=[t]\circ\pi_{\Delta_2}^{(b_1,\cdots,b_n)}\circ f\}.$$

ここにすべての $s$ の自由変数を $c_1,\cdots,c_l$, すべての $t$ の自由変数を $d_1,\cdots,d_m$ とするとき $\Delta_1=(c_1\cdots,c_l)$, $\Delta_2=(d_1,\cdots,d_m)$, $\{b_1,\cdots,b_n\}=\{c_1,\cdots,c_l\}\cup\{d_1,\cdots,d_m\}$ とする．以下にも $\Delta_1,\Delta_2$ を同様に定義する．

$$[\![ \varphi\wedge\psi ]\!]=([\![\varphi]\!]\circ\pi_{\Delta_1}^{(b_1,\cdots,b_n)})\cap([\![\psi]\!]\circ\pi_{\Delta_2}^{(b_1,\cdots,b_n)}),$$

$[\![\varphi\longrightarrow\psi]\!]$

$=\{f:B\longrightarrow(b_1,\cdots,b_n)|$ どんな $g:C\longrightarrow B$ をとっても

$g\circ f=[\varphi]\circ\pi_{\Delta_1}^{(b_1,\cdots,b_n)}\Longrightarrow g\circ f=[\psi]\circ\pi_{\Delta_2}^{(b_1,\cdots,b_n)}\}$,

$$[\![\forall^{\cdot}x\varphi(x)]\!]=\{f:\ B\longrightarrow(b_1,\cdots,b_n)|\eta_A\times f\in[\![\varphi(a)]\!]\}.$$

ここに $A$ は $x$ のタイプ，すなわち $a$ のタイプ．

証明）　前補題を用いれば $\longrightarrow$ 以外は [　] の定義から明らかである．したがって $\longrightarrow$ だけを証明する．

$f\in[\![\varphi\longrightarrow\psi]\!]$

$\Leftrightarrow[\varphi]\circ\pi_{\Delta_1}^{(b_1,\cdots,b_n)}\circ f=[\varphi\wedge\psi]\circ f$

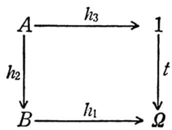
$\Leftrightarrow$ どんな $g:C\longrightarrow B$ をとっても

$[\varphi]\circ\pi_{\Delta_1}^{(b_1,\cdots,b_n)}\circ f\circ g=t_c\longleftrightarrow[\varphi\wedge\psi]\circ f\circ g=t_c.$

ここに最後の $\Leftrightarrow$ は右の図でどんな $h_1$ をとっても

$$h_1\circ h_2=t_A$$

とできることから明らかである．




さて解釈 $\mathfrak{n}$ をとったときに，$\mathfrak{n}\models\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\longrightarrow\psi$ であるときに $\mathfrak{n}\models(\varphi_1,\cdots,\varphi_n\Longrightarrow\psi)$ であると定義する．

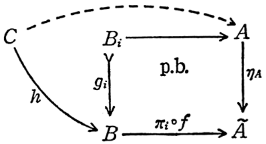
**定理 2**　$\mathfrak{n}$ が解釈として，$\Gamma\Longrightarrow\varphi$ が証明されるときは，$\mathfrak{n}\models(\Gamma\Longrightarrow\varphi)$．

証明）　上の補題によって多くの場合は自明なので残ったいくつかの場合だけを証明する．

〔Eの公理〕　もともとの公理は $\mathrm{E}a\vee\mathrm{E}b$ なる形が入っていて，ここでは $\vee$ は複雑な形の省略で面倒であるので，我々は $\forall^{\cdot}x(x=a\longleftrightarrow x=b)\Longrightarrow a=b$ の形で証明する．

$$f\in\|\forall^{\cdot}x(x=a\longleftrightarrow x=b)\|\ \text{で}\ f:B\longrightarrow\tilde{A}\times\tilde{A}$$

として，$\pi_1\circ f=\pi_2\circ f$ をいえばよい．ここに $A$ は，$x$，したがって $a,b$ のタイプである．




さて右の図によって $B_i, g_i$ を定義する．右の図で $\pi_i\circ f$ は他の射から唯一通りにきまってしまうから，‘任意の $C\overset{h}{\longrightarrow}B$ をとったときに $o=\pi_1\circ f\circ h$ とおいて $o$ が $\eta_A$ で割れるとき（すなわち $i=1$ として図が可換になるような$\dashrightarrow$があるとき）はいつでも $o=\pi_2\circ f\circ h$ とかける’ことをいえば充分である．

したがって $o=\pi_i\circ f\circ h$ が $\eta_A$ で割れるとしよう．

$$(f\circ h)\times\eta_A\in\|c=a\longleftrightarrow c=b\|$$

（ここに $\times\eta_A$ の $\eta_A$ は変数 $c$ に対応する）が成立するから

$$\langle f\circ h, o\rangle\in\|c=a\longleftrightarrow c=b\|.$$

ところで

$$\langle f\circ h, o\rangle\in\|c=a\|\circ\pi^{(a,b,c)}_{(a,c)}.$$

ゆえに

$$\langle f\circ h, o\rangle\in\|c=b\|\circ\pi^{(a,b,c)}_{(b,c)}.$$

これは $\pi_2\circ f\circ h=o$ であることを意味する．

次に $b(a_1,\cdots,a_n)\Longrightarrow\mathrm{E}b\wedge\mathrm{E}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{E}a_n$ を考える．

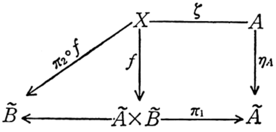
$$f\in\|b(a_1,\cdots,a_n)\|\ \text{で}\ f:X\longrightarrow\tilde{A}_1\times\cdots\times\tilde{A}_n\times\Omega^{A_1\times\cdots\times A_n}$$

とする．このとき $f$ を $\eta_{A_1}\times\cdots\times\eta_{A_n}\times\eta_{\Omega^{A_1\times\cdots\times A_n}}$ で割ることができる．ゆえに $f\in\|\mathrm{E}b\wedge\mathrm{E}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{E}a_n\|$.

〔∀ の推論〕 最初にまず $\forall^{\cdot}x\varphi(x,b), \mathrm{E}a \Longrightarrow \varphi(a,b)$ を考える．ここに $a$ と $b$ しか自由変数はないものとする．

$$f \in \|\forall^{\cdot}x\varphi(x,b) \wedge \mathrm{E}a\| \text{ で } f\colon X \longrightarrow \tilde{A} \times \tilde{B}$$

とする．$\forall^{\cdot}x\varphi(x,b)$ に $a$ が入っていず，$\mathrm{E}a$ に $b$ は入っていないから右図の如く




$$f = (\pi_2 \circ f \times \eta_A) \circ \langle X, \zeta \rangle.$$

ここに

$$\pi_2 \circ f \in \|\forall^{\cdot}x\varphi(x,b)\|,$$

ゆえに

$$f \in \|\varphi(a,b)\|.$$

次に

$$\frac{\varphi(b), \mathrm{E}a \Longrightarrow \phi(a,b)}{\varphi(b) \Longrightarrow \forall^{\cdot}x\phi(x,b)}$$

を考えよう．

いま $f \in \|\varphi(b)\|$ で $f\colon X \longrightarrow \tilde{B}$ とする．

これから　　$f \times \eta_A \in \|\phi(a,b)\|,$

補題により　　$f \in \|\forall^{\cdot}x\phi(x,b)\|.$

**定義**　$\mathcal{E}$ をトポスとする．$\mathcal{E}$ からできる高階言語 $L(\mathcal{E})$ を次の如く定義する．

1. $L(\mathcal{E})$ のタイプとは $\mathcal{E}$ の対象のことである．
2. $[A_1, \cdots, A_n]$ を $\Omega^{A_1 \times \cdots \times A_n}$ によって定義する．
3. $L(\mathcal{E})$ の定数記号とは $c\colon 1 \longrightarrow \tilde{A}$ なる射のこととする．ここに $A$ は $c$ のタイプとする．

さて $L(\mathcal{E})$ の $\mathcal{E}$ のなかの標準的解釈を，定数記号 $c$ に対して $[c] = c$ によって定義される解釈のことと定義しよう．ここに［　］の中の $c$ は $L(\mathcal{E})$ の定数記号としての $c$ であり，右辺の $c$ はもともとの $c\colon 1 \longrightarrow \tilde{A}$ なる射

である.

今後 $L(\mathcal{E})$ の標準的解釈を $I(\mathcal{E})$ で表わすことにする.

さて $\mathcal{E}$ の theory $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ を次によって定義する.

$$\mathcal{T}(\mathcal{E})=\{\varphi|I(\mathcal{E})\models\varphi\}.$$

定理2によって次のことは明らかであろう.

$$\mathcal{T}(\mathcal{E})\vdash\varphi\Leftrightarrow I(\mathcal{E})\models\varphi.$$

さて $\mathcal{T}$ が $L$ の theory で, $\mathfrak{n}$ は $L$ のトポス $\mathcal{E}$ のなかへの解釈とする. このとき $L$ の term と formula に次のように自然な対応によって $L(\mathcal{E})$ の term や formula を対応させることができる. この対応を再び $\mathfrak{n}$ とかくことにする.

$a$ が自由変数のとき　　$\mathfrak{n}(a)=a$,

すなわち $L(\mathcal{E})$ でも $L$ と同じ自由変数を用いる.

$x$ が束縛変数のとき　　$\mathfrak{n}(x)=x$,

すなわち $L(\mathcal{E})$ でも $L$ と同じ束縛変数を用いる.

$\mathfrak{n}(c)=[c]_{\mathfrak{n}}$,　　$c$ は定数記号

$\mathfrak{n}(\mathrm{E}s)=\mathrm{E}\mathfrak{n}(s)$,

$\mathfrak{n}(s=t)=(\mathfrak{n}(s)=\mathfrak{n}(t))$,

$\mathfrak{n}(s(t_1,\cdots,t_n))=(\mathfrak{n}(s))(\mathfrak{n}(t_1),\cdots,\mathfrak{n}(t_n))$,

$\mathfrak{n}(\varphi\wedge\psi)=\mathfrak{n}(\varphi)\wedge\mathfrak{n}(\psi)$,

$\mathfrak{n}(\forall x\varphi(x))=\forall x\ \mathfrak{n}(\varphi(x))$,

$\mathfrak{n}(\{x_1,\cdots,x_n|\varphi(x_1,\cdots,x_n)\})=\{x_1,\cdots,x_n|\mathfrak{n}(\varphi(x_1,\cdots,x_n))\}$.

この $\mathfrak{n}$ は全く自然な対応であるから次の補題は $[\varphi]_{\mathfrak{n}}=[\mathfrak{n}\varphi]_{I(\mathcal{E})}$ を帰納法で証明することによって明らかであろう.

**補題**　$\mathcal{T}$ が $L$ の theory で $\mathfrak{n}$ が $\mathcal{T}$ の解釈, すなわち $\mathfrak{n}\models\mathcal{T}$ であるとき次のことが成立する.

$$\mathcal{T}\vdash\varphi\Longrightarrow\mathcal{T}(\mathcal{E})\vdash\mathfrak{n}(\varphi).$$

**定理 3**　$\mathcal{E}$ がトポスであるとき, 次のことが成立する.

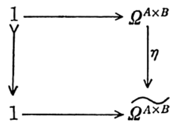
$$\mathcal{C}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))=\mathcal{E}.$$

証明）$A$ が $\mathcal{E}$ の対象とすれば，それは $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ ではタイプになり，$\mathcal{C}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ では再び対象となる．したがって $\mathcal{E}$ と $\mathcal{C}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ の対象は全く同じである．

次に $f\colon A \longrightarrow B$ なる射が $\mathcal{E}$ にあったとする．このときタイプ $[A\times B]$ なる定数記号 $c_f$ を次の如くつくる．ここに

$$c_f\colon 1 \longrightarrow \widetilde{\Omega^{A\times B}},$$
$$A\times B \xrightarrow{f\times B} B\times B \xrightarrow{=_B} \Omega.$$

これから容易に $1\times A\times B \longrightarrow \Omega$ なる射が得られ，その transpose として $1 \longrightarrow \Omega^{A\times B}$ が得られ，右の図によって $1 \longrightarrow \widetilde{\Omega^{A\times B}}$ が得られる．これを $c_f$ とおけばよい．

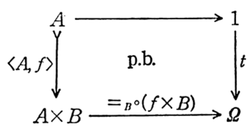



この $c_f$ は明らかに $\mathcal{C}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ の $A \longrightarrow B$ なる射をつくる．この射を再び $f$ とかくことにする．$\mathcal{C}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$ の射はすべてこの方法で作られる．

もちろん $f$ と $g$ から上の方法で $c_f$ と $c_g$ とを作ったときに $c_f=c_g$ ならば $f=g$ であることを証明しなければならない．このためには

$$(=_B\circ(f\times B))=(=_B\circ(g\times B)) \Longrightarrow f=g$$

をいえばよい．しかしこれは右の図が p. b. になっていることから明らかである．




その他二，三チェックしなければならないことがあるが，すべてトポスの $\longrightarrow$ を追いかける演習問題なので読者に残したい．

**定理 4**　$\mathcal{E}$ がトポスならば $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ は記号的に閉じている．

証明）演習問題とする．

以上によってトポスと記号的に閉じている無矛盾な theory とが一対一の

対応という意味で全く等価なものになっている様子がわかることと思う．ここに多少の応用としてトポスに始対象，$A \amalg B$, coequaliser が存在すること，したがって pushout が存在することを簡単にのべよう．トポスを $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ で $\mathcal{T}$ が記号的に閉じていると思って証明すればよい．次のように定義する．

$$O = \{x^{\square} \mid \bot\},$$

$$A \amalg B = \{x, y \mid (\exists^{\cdot}! u x(u) \vee \exists^{\cdot}! v y(v)) \wedge \forall^{\cdot} u, v \neg (x(u) \wedge y(v))\}.$$

ここに $x, y$ のタイプはそれぞれ $[A], [B]$ で $u, v$ のタイプはそれぞれ $A, B$ である．

次に coequaliser について考える．まず次の状態があたえられたとする．

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \longrightarrow C,$$

$$\exists^{\cdot} z : A (f(z) = a \wedge g(z) = b) \Longrightarrow a \sim b$$

となるような最小の同値関係 $\sim$ をつくって $B$ を $\sim$ で類別すればよい．この操作は集合論的であるが，我々は論理と $\{x_1, \cdots, x_n \mid \varphi(x_1, \cdots, x_n)\}$ の集合構成と更に高階の変数をもっているのだから，これをつくることはなんでもない．

# あとがき

まずこの本は入門書であって，どの話題もごくその入口しか書いてないので，興味を持たれる人は是非共それぞれの分野の専門書によって勉強されることを望んでおきたい．

第1章層については次の本がいずれも評判の高いものである．

河田敬義：層の理論，東大セミナリー・ノート．

F. Hirzebruch: Neue topologische Methode in der algebraischen Geometrie, Erg. d. Math. Springer, 1962.

尚，これには次の日本訳がある．

竹内勝訳：代数幾何における位相的方法，吉岡書店．

R. Godement : Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Actualités Sci. Ind. Hermann, 1958.

まず最初に層がどんな意味で集合概念の拡張になっているかを $\langle A, \mathrm{E}, \neg \rangle$ のスタイルでちょっと説明しよう．いま我々は $a \in A$ のようにもう既に外部から眺めるために集合概念および $\in$ を用いてしまっているので，ここで考えられる集合概念を表現するために $\leftarrow$ なる記号を導入して，我々が求めている集合概念で '$a$ が $A$ の元である' ということを $a \leftarrow A$ と表わすことにしよう．このとき我々の集合概念を大まかに表現すれば

$$a \leftarrow A \iff a \in A \text{ で } \mathrm{E}a = X$$

となる．もっと細くデリケートに考えると次のようになる．

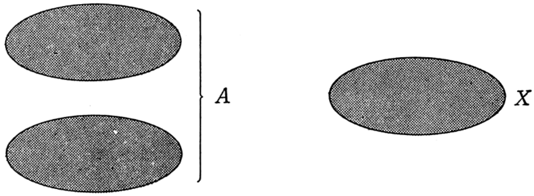
$$a \in A \text{ のとき，} [a \leftarrow A] = \mathrm{E}a.$$

ここで E$a$ が $X$ の開集合であることを思い出してほしい．上の式を読むと $a \in A$ のときのあとは次のようになる．$a < A$ は $U$ だけ成立している．ここに E$a$ を $U$ とかいたのである．

ここで $U=X$ ならば全部で成立している．すなわち $a < A$ が成立しているということなのである．$U=\phi$ ならば $a < A$ は一つも成立していないということになるのである．$U$ が $\phi$ でも $X$ でもなければ $a < A$ は部分的には成立していて部分的には成立していないということになる．古典論理では真偽値は真と偽と二つだけしかない所をここでは $X$ のすべての開集合がそのとり得る値となるのである．

この意味では位相空間自身がここでは論理の世界になっている．

次の図は簡単すぎるかもしれないが，完全な元を丁度二つもっているような集合 $A$ である．




下の図の $A$ は完全な元を一つももっていない．しかし $A$ が空集合かといわれると空集合ともいえないのである．




このような集合概念を発達させて初等的な集合演算を定義したらどうなるであろうか？　その答が層の理論なのである．

第1章の層の理論を勉強されるとき，どうして色々の演算が普通の集合概念の必然的な拡張になっているのか考えてみてほしい．

次に前層の定義は第二の定義が慣用の定義である．第一の定義は第二の定義と殆んど同じものであるが，みる立場が異なっている．

第一の定義では $a$ すなわち $a \lessdot A$ の意味での $A$ の元が中心になっている．第二の定義では $\Gamma(U)$ すなわち $a$ の集りが中心になっている．第二の定義の方が機能的な面があるのでよく用いられるが，現代的集合像としてみたときには第一の定義の方が都合がよいし，また第一の定義の方が素朴で直観的と思うので，素朴で直観的なものを入門書としては機能的なものより先にとるという意味で慣用に反して第一の定義を中心にしてのべた．

また普通，層の理論では代数的構造を同時に入れるのが普通である．本書では代数的構造を入れなかった．理由は入門書であること，および現代的集合像という意味では代数的構造をいれることはあまり本質的でないからである．それに圏としてみるときに，代数的構造はいつでも自然に入って来るのでトポスまで行けば別に差支えないからである．しかし層の理論に興味をもつ人は，以上の意味で本書の層は常識をずい分欠いたものであるから，是非共上の三冊の本のいずれかを読まれるようにお推めしたい．

次に第2章の圏の理論であるが，これも入門の所だけである．もっとハッキリいうならば本書のあとの部分に必要なギリギリの所だけがかいてある．

圏の本として次のものを推めたい．

S. MacLane: Categories for the Working Mathematician, Springer, 1971.

圏の理論では圏が集合になるか本来のクラスになるかを神経質に断る慣習がある．しかしそこでの困難は公理的集合論以来の古い問題であって，圏の理論での処理の方法も，公理的集合論での慣用的処理法以外の何物でもないので本書では別にそのことにコダワラなかった．数学基礎論以外の数学の分野ではこういうことは無神経に過すのが習慣であるし，何も圏の理論が集合とか数学基礎論的考察をする分野でもないので，あまり圏の理論の本質とは関係のないことと思ったのである．

第3章のトポスについてはまず第一にこのトポスの理論は最初に Grothendieck 学派によって開拓されたものであることをのべておきたい.

Grothendieck のもとのトポスについては

M. Artin, A. Grothendieck, J. Verdiér: Theorie des Topos et Cohomology Etale des Schémas, Springer L. N. 269, 270 (SGA 4 1963/64 の改訂版)

をみられたい.

ここでのべているトポスは Grothendieck のトポスの主な部分を公理化したもので, F. W. Lawvere の考えを中心にして, 先ず F. W. Lawvere と M. Tierney とによって, その後大勢の人によって発展させられている.

この方面に興味をもたれる人は

G. C. Wraith: Lectures on Elementary Topoi, pp. 114—206, Springer L. N. 445 Model Theory and Topoi, 1975.

およびそこにあげられている論文表をみて頂きたい.

ここでちょっと断っておきたいのは

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

の $\pi_1, \pi_2$ は epi とは限らない. これは集合論で $B=\phi$ で $A \neq \phi$ のときに $\pi_1$ が epi でないことから明らかである. もちろん集合論で空集合は唯一個しかないから大抵の場合に空集合は例外として除外して考えて差支えない. しかしトポスでは (層でも) 全体としては空集合でなくても部分的には空集合であるものがいくらでもあり得るので空集合を例外として考える訳には行かない.

トポスの理論は抽象的のように見えるが, 層の理論がよいモデルになっているので事ある毎に層に戻って考えてみるのがよい方法である.

トポスの理論の第1節の終りはかなり技巧的になっている. 第1節, 第2節, 第3節の順序は拙かったかも知れない. 第1節, 第2節, 第3節を順序にこだわらずに同時によんでもらった方がよいかも知れない.

尚, P. T. Johnstone がトポスの辞書のようなものを今かいているそうである.

第4章の手法はすべて数理論理学の初歩で常用のものである. 数理論理学の素養があれば読むのに何んの困難もないであろう. 逆にこの章の内容をマスターすれば数理論理学の初歩を勉強するのに非常に便利であろう.

本章の内容に近いものとして次の論文がある.

R. H. Thompson: On the Strong Semantical Completeness of the Intuitionistic Predicate Calculus, Journal of Symbolic Logic vol. 33, 1968.

第5章のトポスと直観論理との関係は Dionne, Bénabou, Mitchell, Osius, Reyes, Fourman, Coste, Boileau などの人達によって発展させられて来ている. 本書の E をいれるものは M. Fourman の工夫である.

最後はブール価モデルのことを知っている人のためにブール価モデルをトポスだと思うときはどのようにしたらよいかを簡単にのべておこう.

ブール価モデルについては

G. Takeuti & W. Zaring: Axiomatic Set Theory, Graduate Texts in Math. 8, Springer, 1973

を参考にされたい.

いま $\mathcal{B}$ を complete なブール代数として, そのブール価モデルを $V^{(\mathcal{B})}$ と書く. このとき求めるトポスを $\mathcal{E}$ としたとき

1. $\mathcal{E}$ の対象とは $V^{(\mathcal{B})}$ の元のことである.
2. いま $A, B$ が $V^{(\mathcal{B})}$ の元としたとき.

$f: A \longrightarrow B$ なる $\mathcal{E}$ の射とは,

$$[f: A \longrightarrow B] = \mathbf{1}$$

が成立するものとする. ここに $\mathbf{1}$ は $\mathcal{B}$ の最大元である.

$A \xrightarrow{f} B$ で $B \xrightarrow{g} C$ のとき $g \circ f$ は常識通りに定義する.

3. $\mathcal{E}$ の $1$ は $V^{(\mathcal{B})}$ の $\check{1}$ であるとする.

4. $\mathcal{E}$ の $\Omega$ は $V^{(\mathcal{B})}$ の $\check{2}$ であるとする.

5. $t: 1 \longrightarrow \Omega$ は $\check{1}$ の元に $\check{2}$ の元 $\check{1}$ を対応させる $V^{(\mathcal{B})}$ の関数とする.

$f: 1 \longrightarrow \Omega$ なるすべての $f$ は次のようにして作ることができる.

$b$ を $\mathcal{B}$ の任意の元とする. そのとき

$$[\langle \check{0}, \check{1} \rangle \in f] = b, [\langle \check{0}, \check{0} \rangle \in f] = -b,$$

$$[f: \check{1} \longrightarrow \check{2}] = \mathbf{1}$$

をみたす $f$ が唯一通り存在する.（ここで唯一通りという意味はもし $f$ と $g$ と二つあったとすれば

$$[f = g] = \mathbf{1}$$

が成立するという意味である.）

6. $\times$ や $\phi$ は常識通りに集合論の普通の定義をとればよい.

校正の時に一年ぶりで原稿をよんでみると, 最初にかいた時から色々考えが変化している. 今だったら第2章と第1章の順序を逆にするのだったと思っている. したがって読者に第1章と第2章とを独立によみ始めてとりつき易い方から入って行くことをお推めしたい.

## 第2刷のあとがき

柴田敏男氏が第1章と第2章を丹念に読まれて，その中のミスプリント，色々の改良及び次の二つの欠陥を指摘された：

1. 16 ページの定理2の多くの性質は前層で成立していてそれが前層の段階で用いられている.
2. 20 ページの前層から層を誘導する時の $\equiv$ は同値関係になっていない.

この注意の内，ミスプリントといくつかの改良で簡単に直せるものは第2刷の機会に本文中に取り入れておいた．上の 1. については確かにもう少し詳しく状況を説明すべきであろう．又，2. は完全に訂正が必要である．これ等について柴田敏男氏に次の訂正を書いて頂いた．ここで 2. については，私の極めて短い返答をもとにして柴田氏が証明を全部遂行されたものである.

ここに柴田敏男氏に厚くお礼を申しのべたい.

前層から層を誘導することについて.

20 ページの論述に不十分な点（そこで定義した $\equiv$ が推移律を満たすとは限らない）があったので，次のような展開に訂正するとよい.

0° 前層における二，三の性質

前層 $\langle A, \mathrm{E}, \urcorner\rangle$ において，次の三つは容易に示すことができる.

1) $$f\urcorner U=f\urcorner(\mathrm{E}f\cap U).$$

2) $$\mathrm{E}f\subset U \Leftrightarrow f\urcorner U=f.$$

3) $$\mathrm{E}f\supset U \Leftrightarrow \mathrm{E}(f\urcorner U)=U.$$

また，前層においても，集合 $[f=g]$ を

$$[f=g]=\bigcup\{U\in\mathfrak{O}(X)\mid f\urcorner U=g\urcorner U\}$$

によって定めると，次の性質を導くことができる．

4)　$f$ と $g$ が両立していれば $\mathrm{E}f\cap\mathrm{E}g\subset[f=g]$.

5)
$$[f=f]=X,$$
$$[f=g]=[g=f],$$
$$[f=g]\cap[g=h]\subset[f=h],$$
$$[f=g]\cap U=[f\urcorner U=g\urcorner U]\cap U.$$

つまり 16 ページの定理2の大部分は前層で成立するのである．

1°　中間層

前層 $\langle A, \mathrm{E}, \urcorner\rangle$ が中間層であるとは，前項 4) の逆が成立すること，すなわち，

$$\mathrm{E}f\cap\mathrm{E}g\subset[f=g]\ \text{ならば}\ f\ \text{と}\ g\ \text{は両立}$$

であることと定義する．

前層 $\langle A, \mathrm{E}, \urcorner\rangle$ の二元 $f, g$ について，

$$f\equiv g\ \text{とは}\ \mathrm{E}f=\mathrm{E}g\subset[f=g]$$

と定めると，$\equiv$ は $A$ における同値関係となり，

$$\hat{A}=A/\equiv$$

は中間層となる．$\hat{A}$ における $\mathrm{E}$ や $\urcorner$ は，

$$A\xrightarrow{\varphi}A/\equiv$$

とするとき，

$$\mathrm{E}\varphi(f)=\mathrm{E}f,\quad \varphi(f)\urcorner U=\varphi(f\urcorner U)$$

によって具合よく定められる．$\hat{A}$ が中間層であることの証明は演習問題とする．

2°　中間層から層へ

中間層 $\langle A, \mathrm{E}, \urcorner\rangle$ が与えられたとき本文 20, 21 ページの論述はそのまま成立する．すなわち，互いに両立している元の集合の全体 $\mathscr{F}$ において，$F_1$, $F_2\in\mathscr{F}$ のとき，

$$F_1\equiv F_2\ \text{とは}\ \mathrm{E}F_1=\mathrm{E}F_2\wedge(F_1\cup F_2)\in\mathscr{F}$$

と定めると，$\equiv$ は $\mathscr{F}$ の上の同値関係となる．

念の為，推移律を示すと，

$F_1 \equiv F_2$, $F_2 \equiv F_3$ ならば，まず，

$$\mathrm{E}F_1 = \mathrm{E}F_2 = \mathrm{E}F_3$$

である．そして $f_1 \in F_1$, $f_3 \in F_3$ のとき，任意の $f_2 \in F_2$ に対して，

$$\mathrm{E}f_1 \frown \mathrm{E}f_2 \subset [f_1 = f_2], \quad \mathrm{E}f_2 \frown \mathrm{E}f_3 \subset [f_2 = f_3]$$

$$\therefore \qquad \mathrm{E}f_1 \frown \mathrm{E}f_2 \frown \mathrm{E}f_3 \subset [f_1 = f_2] \frown [f_2 = f_3]$$

$$\subset [f_1 = f_3]. \qquad \text{(0° の 4) による)}$$

$f_2$ は任意であったから，

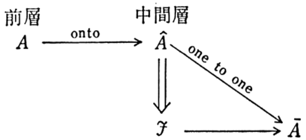
$$\mathrm{E}f_1 \frown \mathrm{E}f_3 \subset \mathrm{E}f_1 \frown \mathrm{E}f_2 \frown \mathrm{E}f_3 \subset [f_1 = f_3].$$

$A$ は中間層であるから，$f_1$ と $f_3$ は両立し，

$$F_1 \smile F_3 \in \mathscr{F}$$

を導くことができる．

結局，前層から層を導くのは次の図式のようになる．

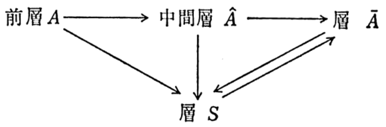



3°　層の第二の定義 $\langle S, p \rangle$ との関係

本文 19 ページの層 $\langle A, \mathrm{E}, \neg \rangle$ から層 $\langle S, p \rangle$ を導く段階では $A$ が層であることを必要としない．すなわち $A$ が前層でも，同じ方法で導いた $\langle S, p \rangle$ は層となる．

そして，その層 $\langle S, p \rangle$ から本文 19, 20 ページの方法で層 $\langle \boldsymbol{A}, \bar{\mathrm{E}}, \bar{\neg} \rangle$ を導いたとき，はじめの $\langle A, \mathrm{E}, \neg \rangle$ が層ならば $\langle \boldsymbol{A}, \bar{\mathrm{E}}, \bar{\neg} \rangle$ と $\langle A, \mathrm{E}, \neg \rangle$ は同型になるのである．

したがって前項 2° で前層 $A$, それから導いた中間層 $\hat{A}$, それから導いた層 $\bar{A}$ のいずれからも第二の定義の層 $\langle S, p \rangle$ を導くことができるが，それら三つは互いに同相であることが示される．




こうして層 $\bar{A}$ がまさに $A$ から誘導されたものということになる.

# 第3刷のあとがき

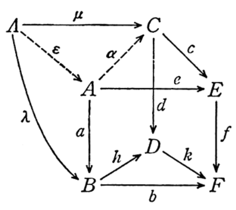
第3刷の折に第3章§2 の定理8の証明にギャップがあるので訂正しておきたい．このギャップは本書が出版直後に倉田令二朗君が指摘されたものである．

先ずギャップを正確にいうと，$B=1$ の場合に制限した所である．もっと正確にいえば，“一般の場合は面倒であるから，特別な場合 $B=1$ の時にだけ証明することにする”と正直に書けばよかった所を筆がすべって，$B=1$ の場合だけやれば充分の様な表現になってしまった所がギャップなのである．ところで特殊な場合について証明をしておくことは教育上悪いことではないから本文の方はそのままに残しておいて，ここでは一般の場合を独立に証明しておくことにする．

先ず必要な補題から証明することにする．

**補題** 下の図において $ABFE$ と $CDFE$ は p. b. であって

$$b=kh$$




が成立しているものとする．このとき $A\xrightarrow{\alpha}C$ なる $\alpha$ で $ABDC$ が p. b. になるような $\alpha$ が唯一通り存在する．

更に $f:E\longrightarrow F$ が mono ならば，

$$c\alpha=e$$

が成立する．

証明）$CDFE$ が p. b. であって

$$fe=ba=kha$$

であるから次の条件をみたす $\alpha$ が唯一通りに存在する．

$$e=c\alpha \quad で \quad ha=d\alpha$$

したがって $ACDB$ は可換である．証明したいことは $ACDB$ が p. b. で

あることであるから図の様に $\Lambda, \mu, \lambda$ をとって

$$h\lambda = d\mu$$

として図の様な $\varepsilon$ で

$$a\varepsilon = \lambda \quad \text{で} \quad \alpha\varepsilon = \mu$$

となる $\varepsilon$ が唯一通り存在することをいえばよい．ところで $h\lambda = d\mu$ から $kh\lambda = kd\mu$ が出るので

$$b\lambda = fc\mu$$

が出て来る．ところで $AEFB$ は p. b. であるから $\varepsilon$ で

$$a\varepsilon = \lambda \quad \text{で} \quad e\varepsilon = c\mu$$

となる様な $\varepsilon$ が唯一通り存在する．したがって証明すべきことは

$$\alpha\varepsilon = \mu$$

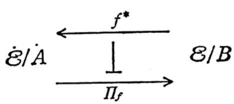
である．ところで $CEFD$ は p. b. であるから

$$c\mu = c\alpha\varepsilon \quad \text{で} \quad d\mu = d\alpha\varepsilon$$

をいえば充分である．ところで $c\mu = e\varepsilon = c\alpha\varepsilon$ であり $d\mu = h\lambda = ha\varepsilon = d\alpha\varepsilon$ であるから証明が終った．

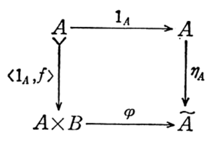
次に定理の証明であるが念の為に定理をもう一度ここにあげておく．

**定理**　$A \xrightarrow{f} B$ をトポス $\mathcal{E}$ の射とすれば，$f^* : \mathcal{E}/B \longrightarrow \mathcal{E}/A$ は右随伴関手 $\Pi_f : \mathcal{E}/A \longrightarrow \mathcal{E}/B$ をもつ，すなわち




証明）$\xi : X \longrightarrow A$ として，$\Pi_f(\xi)$ を定義する．

$\varphi$ を右の図が p. b. となる様に唯一通りに定まった射として定義する．




$\varphi$ の transpose(p. 87) $\hat{\varphi}$ をとれば

$$\hat{\varphi} : A \longrightarrow \tilde{A}^B$$

この上で $\Pi_f$ を次の式で定義する．（この頁の一番下の図を参照）

$$\Pi_f(\xi) = \hat{\varphi}^*(\tilde{\xi}^A)$$

明らかに $\Pi_f$ は関手になっている．さて証明したいことは，$\zeta : Z \longrightarrow B$ を任意にとったときに

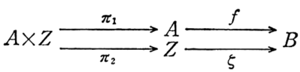
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/A}(f^*\zeta, \xi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(\zeta, \Pi_f(\xi))$$

が自然な同型対応になっているということである．

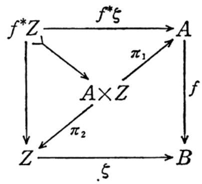
まず $k : f^*\zeta \longrightarrow \xi$ として

$$e : f^*Z \rightarrowtail^{e} A \times Z$$

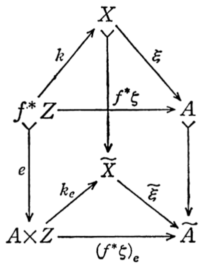
を次の図の equaliser として定義する．




これを右の図の様にかけば図の四角は p. b. になっている．



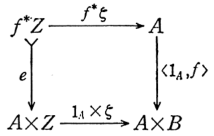

ここで $k_e$ と $(f^*\zeta)_e$ とを右の図の二つの四角が可換になる様な唯一通りに存在する射として定義する．



ところで $\xi k = f^*\zeta$ であるから次の式も成立する.

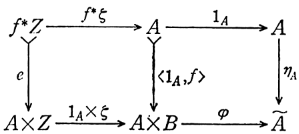
$$\tilde{\xi} k_e = (f^*\zeta)_e$$

さて補題によって次の図は p. b. である.




したがって次の図の大きい長四角も p. b. であり，更に次の式も分る.

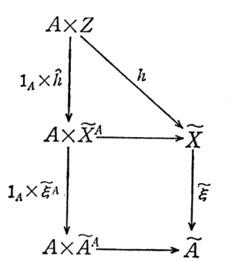
$$(f^*\zeta)_e = \varphi\circ(1_A\times\zeta)$$

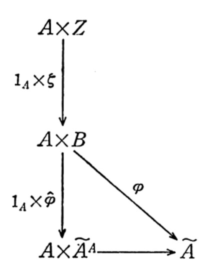



更にまた補題によって次の $(—)_e$ が同型対応であることも分る.

$$(—)_e : \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}/A}(f^*\zeta, \xi) \longrightarrow \{h : A\times Z \longrightarrow \tilde{X} \mid \tilde{\xi} h = \varphi\circ(1_A\times\zeta)\}$$

ところで次の図を見れば




$$\tilde{\xi} h = \varphi(1_A\times\zeta) \Leftrightarrow \tilde{\xi}^A \hat{h} = \hat{\varphi}\zeta$$

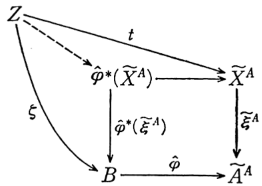
が出て来るから，$\hat{h}$ を $t$ とすれば次の同型対応がえられる．

$$\{h : A\times Z \longrightarrow \tilde{X} \mid \tilde{\xi}h=\varphi\circ(1_A\times\zeta)\}\simeq\{t : Z\longrightarrow \tilde{X}^A \mid \tilde{\xi}^A t=\hat{\varphi}\zeta\}$$

したがって全体として次の同型対応がえられる．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/A}(f^*\zeta, \xi)\simeq\{t\,;Z\longrightarrow\tilde{X}^A \mid \tilde{\xi}^A t=\hat{\varphi}\zeta\}$$

最後に次の図を考えれば




四角は p.b.

次の式が出て来る．

$$\{t : Z\longrightarrow\tilde{X}^A \mid \tilde{\xi}^A t=\hat{\varphi}\zeta\}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(\zeta, \hat{\varphi}^*(\tilde{\xi}^A))$$

ここで定義によって

$$\Pi_f(\xi)=\hat{\varphi}^*(\tilde{\xi}^A)$$

であることを思い出せば，右辺の $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}$ は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(\zeta, \Pi_f(\xi))$$

であり，全体として

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/A}(f^*\zeta, \xi)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/B}(\zeta, \Pi_f(\xi))$$

が自然な同型対応であることが証明されて定理の証明が終った．

# 索　引

# 記 号 表

| 記　　号 | 用　　　　例 | 参照ページ |
|---|---|---|
| $1$ | | 68, 92, 107, 109, 111 |
| $1_B$ | | 102 |
| $r_{UV}$ | | 14 |
| $t$ | | 25, 92, 179 |
| $t$ | $t_X \quad t_A$ | 106, 112 |
| $I$ | $I_{\mathcal{A}} \quad I_{\mathcal{B}}$ | 79 |
| $L$ | | 128 |
| $O$ | $O_{A,B}$ | 76 |
| $T$ | | 171 |
| $Y_{\mathcal{C}}$ | $Y_{\mathcal{C}}(C)$ | 70 |
| $Y^{\mathcal{C}}$ | $Y^{\mathcal{C}}$ | 71 |
| $\varDelta_A$ | | 94 |
| $\varDelta$ | | 82 |
| $\varDelta X$ | | 82 |
| $\mathcal{E}_A$ | | 81 |
| $\eta_B$ | | 79, 81 |
| $\eta_B$ | | 97, 101, 191 |
| $\varSigma_f$ | | 113 |
| $\varPi_f$ | | 115 |
| $t[\mathcal{S}]$ | | 131, 148 |
| $^{A}$ | $B^A \quad C^A \quad P^A$ | 30, 86, 116, 179 |
| $E^A$ | | 146 |
| $I(\mathcal{E})$ | | 190 |
| $L(\mathcal{A})$ | | 148 |
| $L(\mathcal{E})$ | | 189 |
| $L(\mathcal{S})$ | | 131 |

| 記　　号 | 用　　　　例 | 参照ページ |
|---|---|---|
| $U_\varphi$ | | 163 |
| Ab | | 47, 62, 63, 67 |
| Gr | | 47, 62, 63, 67, 77 |
| Sets | | 42, 62, 63, 67, 77, 93 |
| $\mathcal{B}^A$ | | 57 |
| $\mathcal{C}(-,-)$ | | 69 |
| $\mathcal{C}(A, B)$ | | 48 |
| $\mathcal{C}/A$ | | 110 |
| $\mathcal{E}/A$ | | 111 |
| $\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2$ | | 47 |
| $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ | | 48 |
| $\mathcal{E}$ | | 107 |
| $\mathcal{O}$ | | 140 |
| $\mathcal{P}$ | | 109 |
| $\mathcal{S}$ | | 130 |
| $\mathcal{T}_X$ | | 90 |
| $\pi_\Delta{}^\Gamma$ | | 183, 187 |
| $\Gamma(U)$ | | 20 |
| $\Omega$ | | 21, 23, 108, 112, 179 |
| $\tilde{\Omega}$ | | 21 |
| $\mathfrak{n}$ | $\mathfrak{n}\models\mathcal{T}$ | 186 |
| E | $\mathrm{E}f$　$\mathrm{E}a$ | 3, 13, 90, 148, 155 |
| $\bigcup F$ | | 16, 31 |
| $\ulcorner$ | $f\ulcorner A_0$ | 13 |
| $\urcorner$ | $a\urcorner\phi$　$f\urcorner \mathrm{E}g$ | 13, 14, 15 |
| $\square$ | | 169 |
| $=_A$ | | 94 |
| $\stackrel{A}{=}$ | | 146 |
| $\{\cdot\}_A$ | | 94, 96 |
| $\perp$ | $\phi\longrightarrow\perp$　$\perp\Rightarrow$ | 167, 169 |
| $\longleftrightarrow$ | | 181 |
| $\longrightarrow$ | | 181 |

| 記号 | 用例 | 参照ページ |
|---|---|---|
| $\wedge$ | | 181 |
| $\leqslant$ | $a\leqslant a$ $A\leqslant B$ | 89, 109 |
| $\equiv$ | $(x, f_1)\equiv(x, f_2)$ $\tilde{S}/\equiv$ $\mathcal{F}/\equiv$ | 19, 20, 108 |
| $\simeq$ | $f^*(T_1\times T_2)\simeq f^*(T_1)\times f^*(T_2)$ | 38, 88 |
| $\approx$ | $s\approx t$ $f\approx g$ | 176 |
| $\times$ | $f\times g$ | 50 |
| $\times_A$ | $X\times_A Y$ | 112, 118 |
| $\amalg$ | $A\amalg B$ | 58, 88, 122 |
| $\models$ | $\mathscr{S}\models A$ $\mathscr{S}\models\varphi$ | 131, 142, 150, 187 |
| $\vdash$ | $\Gamma\vdash\varphi$ | 161 |
| $\Longrightarrow$ | $A_1, \cdots, A_m\Longrightarrow B_1, \cdots, B_n$ | 134 |
| | $A_1, \cdots, A_m\Longrightarrow$ $\Longrightarrow B_1, \cdots, B_n$ | |
| $\longrightarrow\!\!\!\!\mid$ | $F\longrightarrow\!\!\!\!\mid U$ | 77 |
| $\rightarrowtail$ <br> $\overset{m}{\rightarrowtail}$ | $A\overset{m}{\rightarrowtail}B$ | 49 |
| $\twoheadrightarrow$ <br> $\overset{f}{\twoheadrightarrow}$ | $A\overset{f}{\twoheadrightarrow}B$ | 59 |
| $\longrightarrow$ | $A\longrightarrow B$ | 97 |
| $\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ | $A\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ | 119 |
| $\widetilde{\mathrm{ev}}_A$ | | 183 |
| $\sim$ | $\tilde{B}$ | 97, 182 |
| $\sim$ | $\tilde{D}$ | 84 |
| $\sim$ | $\tilde{S}$ | 19 |
| $\hat{}$ | $\hat{g}(c)$ $\hat{f}$ $\hat{\pi}_1$ | 34, 35, 87, 115 |
| $\cdot$ | $\dot{A}$ $\dot{\mathscr{S}}$ $\dot{u}$ $\dot{R}$ $\dot{c}$ $\dot{F}$ | 155, 157 |
| $\cdot$ | $\forall^{\cdot}x$ $\exists^{\cdot}x$ | 173, 175, 188 |
| $-$ | $\bar{f}$ $\bar{F}$ $\bar{R}$ $\bar{c}$ | 131, 148 |
| $*$ | $f^*(T)$ $f^*g$ | 37, 38 |
| $*$ | $f_*S$ $f_*g$ | 38, 40 |
| $*$ | $A^*$ $F^*$ $c^*$ | 154, 163, 164 |
| $*$ | $L^*$ | 162 |
| $*$ | $\mathscr{S}^*$ | 154 |
| $*$ | $\mathcal{T}^*$ | 174 |

| 記　　号 | 用　　例 | 参照ページ |
|---|---|---|
| $\uparrow$ | $A\uparrow$ | 109 |
| $:$ | $a:A \quad x:1$ | 146, 178 |
| $_a$ | $f_a \quad (a, f_a)$ | 111 |
| $_b$ | $(\ )_b \quad X_b$ | 117 |
| cl | $\mathrm{cl}(f)$ | 92 |
| cod | $\mathrm{cod}(f) \quad \mathrm{cod}\, f$ | 45 |
| dom | $\mathrm{dom}(f) \quad \mathrm{dom}\, f$ | 45 |
| ev | $\mathrm{ev}(a, f)$ | 33, 34, 87, 179 |
| id | $\mathrm{id}_B \quad \mathrm{id}_A$ | 46, 93 |
| $\varinjlim$ | $\varinjlim \mathscr{D}$ | 61, 68, 82, 85 |
| $\varprojlim$ | $\varprojlim \mathscr{D}$ | 60, 68, 82, 85 |
| typ | $\mathrm{typ}(R)$ | 145 |
| Hom | $\mathrm{Hom}(f^*T, S)$ | 40 |
| $\mathrm{Hom}_\sigma$ | $\mathrm{Hom}_\sigma(A, B)$ | 48 |
| Nat | $\mathrm{Nat}(F, G)$ | 71 |
| Spec | $\mathrm{Spec}(\Gamma)$ | 163 |
| Top | $\mathrm{Top}(X)$ | 37, 48, 77, 92, 93 |
| $[\ \ ]$ | $[f<g] \quad [f=g] \quad [\varphi]$ | 4, 16, 149 |
| $[\ \ ]_\mathscr{A}$ | $[A]_\mathscr{A}$ | 141 |
| $[\ \ ]$ | $[c]$ | 182 |
| $[\mathrm{E}\ \ ]$ | $[\mathrm{E}u]$ | 154, 164 |
| $[R(,\cdots,)]$ | $[R(u_1, \cdots, u_n)]$ | 154, 164 |
| $[\ =\ ]$ | $[u=v]$ | 154, 164 |
| $\langle\ \ \rangle$ | $\langle f, g\rangle$ | 50, 52 |
| $[\ \ ]$ | $[A_1, \cdots, A_n]$ | 169 |
| $\{\ \mid\ \}$ | $\{x_1, \cdots, x_n \mid \varphi(x_1, \cdots, x_n)\}$ | 170 |
| $\ulcorner\ \ \urcorner$ | $\ulcorner T(A) \urcorner$ | 184 |
| $[\![\ \ ]\!]$ | $[\![f]\!] \quad [\![[\varphi]]\!]$ | 186 |

## 著者紹介


竹内外史（たけうちがいし）

1926年　石川県に生まれる.

1947年　東京大学理学部数学科卒業.

　　　　イリノイ大学名誉教授.

主　著　『現代集合論入門』（日本評論社），

　　　　『数学基礎論』（共立出版，共著），

　　　　『集合とは何か』（講談社，ブルーバックス），

　　　　『ゲーデル』（日本評論社），

　　　　『数学的世界観』（紀伊國屋書店）.



『層・圏・トポス——現代的集合像を求めて』



1978年1月20日　第1版第1刷

2010年3月30日　第1版第8刷

著者　竹内外史

発行者　黒田敏正

発行所　日本評論社

〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4

電話(03)3987-8621（販売）

(03)3987-8599（編集）

検印省略

印刷　精興社

製本　松岳社

●落丁本・乱丁本はお取替えいたします.

Printed in Japan

ISBN 978-4-535-78109-2　C3041